

**Université de Montréal**

**Action de groupe, formes normales et systèmes  
quadratiques à foyer faible d'ordre trois**

par

**Myriam Demers**

Département de mathématiques et de statistique  
Faculté des arts et des sciences

Mémoire présenté à la Faculté des études supérieures  
en vue de l'obtention du grade de  
Maître ès sciences (M.Sc.)  
en Mathématiques

septembre 2015



**Université de Montréal**

Faculté des études supérieures

Ce mémoire intitulé

**Action de groupe, formes normales et systèmes  
quadratiques à foyer faible d'ordre trois**

présenté par

**Myriam Demers**

a été évalué par un jury composé des personnes suivantes :

*Marlène Frigon*

---

(président-rapporteur)

*Dana Schlomiuk*

---

(directeur de recherche)

*Iosif Polterovitch*

---

(membre du jury)

Mémoire accepté le:

*10 septembre 2015*

---



## SOMMAIRE

---

Dans ce mémoire, on s'intéresse à l'action du groupe des transformations affines et des homothéties sur l'axe du temps des systèmes différentiels quadratiques à foyer faible d'ordre trois, dans le plan. Ces systèmes sont importants dans le cadre du seizième problème d'Hilbert.

Le diagramme de bifurcation a été produit à l'aide de la forme normale de Li dans des travaux de Andronova [2] et Artès et Llibre [4], sans utiliser le plan projectif comme espace des paramètres ni de méthodes globales. Dans [7], Llibre et Schlomiuk ont utilisé le plan projectif comme espace des paramètres et des notions à caractère géométrique global (invariants affines et topologiques).

Ce diagramme contient 18 portraits de phase et certains de ces portraits sont répétés dans des parties distinctes du diagramme. Ceci nous mène à poser la question suivante : existe-t-il des systèmes distincts, correspondant à des valeurs distinctes de paramètres, se trouvant sur la même orbite par rapport à l'action du groupe ?

Dans ce mémoire, on prouve un résultat original : l'action du groupe n'est pas triviale sur la forme de Li (théorème 3.1), ni sur la forme normale de Bautin (théorème 4.1). En utilisant le deuxième résultat, on construit l'espace topologique quotient des systèmes quadratiques à foyer faible d'ordre trois par rapport à l'action de ce groupe.

**Mots-clés : transformation affine, action de groupe, foyer faible d'ordre trois, diagramme de bifurcation, espace quotient par l'action d'un groupe**



## SUMMARY

---

We are interested here in the action of the group of affine transformations and time homotheties on quadratic differential systems which have a weak focus of third order. These systems are important for Hilbert sixteenth problem.

The bifurcation diagram was produced using Li's normal form in the articles of Andronova [2], and Artès and Llibre [4], without using the projective plane as parameter space, and without using global methods. In [7], Llibre and Schlomiuk used the projective plane as parameter space and global geometric methods (affine and topological invariants).

This diagram contains 18 phase portraits and some of these portraits are repeated in distinct parts of the diagram. This led us to ask the following question : do there exist distinct differential systems, corresponding to distinct values of the parameter, which are on the same orbit of the group action ?

In this master's thesis, we prove an original result : the action of the group is not trivial on Li's normal form (theorem 3.1), neither is it trivial on Bautin's normal form (theorem 4.1). Using the second result, we construct the quotient topological space of these systems with a weak focus of third order, with respect to the group action.

**Keywords :** affine transformation, group action, weak focus of third order, bifurcation diagram, quotient space with respect to a group action





# TABLE DES MATIÈRES

---

<b>Sommaire</b> .....	v
<b>Summary</b> .....	vii
<b>Liste des figures</b> .....	xi
<b>Remerciements</b> .....	1
<b>Introduction</b> .....	3
Henri Poincaré .....	6
Le seizième problème d'Hilbert .....	7
Présentation du mémoire .....	8
<b>Chapitre 1. Notions de base</b> .....	11
1.1. Action de groupe .....	11
1.1.1. Transformations affines .....	12
1.1.2. Homothéties du temps .....	13
1.2. Espace projectif de dimension deux .....	14
1.3. Compactification de Poincaré .....	15
1.3.1. Compactification de Poincaré sur la sphère .....	15
1.3.2. Compactification de Poincaré sur le disque .....	20
<b>Chapitre 2. Système d'équations différentielles quadratiques ayant un                   foyer faible d'ordre trois</b> .....	21
2.1. Classification des champs de vecteurs planaires polynomiaux ...	21
2.2. Systèmes différentiels quadratiques à foyer faible .....	24
2.3. Forme normale de Li pour <b>QW3</b> .....	27
2.4. Diagramme de bifurcation pour la famille <b>QW3</b> à partir de la forme normale de Li .....	37

<b>Chapitre 3. Action locale du groupe <math>GL(2, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}^*</math> sur l'espace des paramètres de la forme normale de Li.....</b>	<b>43</b>
3.1. Action de $\tilde{G}$ sur $P_2(\mathbb{R})$ .....	44
3.2. Application des théorèmes et analyse partielle des résultats .....	57
<b>Chapitre 4. Action locale du groupe <math>GL(2, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}^*</math> sur la forme normale de Bautin pour QW3.....</b>	<b>65</b>
4.1. Forme normale de Bautin pour QW3.....	65
4.2. Diagramme de bifurcation pour QW3 à partir de la forme normale de Bautin .....	68
4.3. Action de $\tilde{G}$ sur l'espace des paramètres de la forme normale de Bautin .....	71
4.4. Action de $\tilde{G}$ sur $P_2(\mathbb{R})$ .....	72
<b>Conclusion .....</b>	<b>87</b>
<b>Bibliographie.....</b>	<b>89</b>

## LISTE DES FIGURES

---

0.1	Différentes courbes de phases. ....	4
0.2	Séparatrices. ....	5
0.3	Deux types de singularité en $(x_0, y_0)$ . ....	5
1.1	Ensemble $A$ . ....	15
1.2	Le plan $Z = 1$ est tangent à la sphère $S^2$ au point $(0, 0, 1)$ . ....	16
2.1	Diagramme de bifurcation pour la famille <b>QW3</b> . ....	38
2.2	Diagramme de bifurcation pour la famille <b>QW3</b> . ....	39
2.3	Courbes de bifurcation pour la famille <b>QW3</b> . ....	40
4.1	Diagramme et courbes de bifurcation pour la famille <b>QW3</b> ....	70
4.2	Les systèmes à centre dans <b>hD</b> ....	84
4.3	Les systèmes à centre dans <b>hD</b> ....	85
4.4	Les systèmes à centre dans <b>hD</b> ....	86



## REMERCIEMENTS

---

Ce travail n'aurait jamais vu le jour sans Madame Dana Schlomiuk. Dès la première année au baccalauréat, elle m'initie à la recherche lors d'un stage d'été, et le projet qu'elle m'a confié s'est développé jusqu'à la rédaction de ce mémoire. Tout au long de ce marathon mathématique, elle s'est montrée d'une patience et d'une générosité inégalable. Je la remercie pour sa compréhension envers toutes les décisions que j'ai prises, et qui ont retardé la finalisation de ce projet. Je ne peux exprimer à quel point je suis reconnaissante pour tout ce qu'elle m'a appris au cours des dernières années.

Merci à Monsieur Nicolae Vulpe, pour la lecture d'une version précédente du théorème 3.1 et pour ses remarques par rapport à celui-ci. Elles m'ont permis de rehausser la qualité mathématique du présent mémoire.

Je remercie le CRSNG, le CRM, le MELS et, encore une fois, Madame Dana Schlomiuk pour leur soutien financier durant mes études. Ces bourses m'ont permis de me concentrer sur mes études. J'aimerais souligner l'importance du congé accordé par le MELS, qui a été capital pour l'achèvement de ce mémoire.

Pour leur support psychologique, je tiens finalement à remercier tous mes proches. Mes amis et collègues n'ont jamais cessé de m'encourager à compléter ce mémoire. Ma famille m'a toujours soutenue dans mes différents projets, et ce ne fut pas différent avec celui-ci. En particulier, je souhaite remercier mon conjoint, Luc, qui m'a supporté toutes ces années, autant durant les bons moments que ceux plus difficiles.



# INTRODUCTION

---

Considérons un système différentiel défini dans un ouvert  $\Delta$  de  $\mathbb{R}^2$  :

$$\begin{cases} \dot{x} = p(x, y) \\ \dot{y} = q(x, y). \end{cases} \quad (0.1)$$

où  $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$ ,  $\dot{y} = \frac{dy}{dt}$  et  $p, q$  sont de classe  $C^r$  ( $1 \leq r \leq \infty$  ou  $r = \omega$ ). À ce type de système est associé un champ de vecteurs

$$\xi = p \frac{\partial}{\partial x} + q \frac{\partial}{\partial y}, \quad (0.2)$$

ainsi que l'équation différentielle suivante :

$$q dx - p dy = 0. \quad (0.3)$$

$\Delta$  est appelé *espace de phase* du système (0.1).

**Théorème 0.1** (Existence (globale) et unicité des solutions). *Soit  $\Delta$  un sous-ensemble ouvert de  $\mathbb{R}^2$  et soit  $\xi : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^2$  un champ de vecteurs  $C^r$ , où  $1 \leq r \leq \infty$  ou bien  $r = \omega$ . Alors, pour tout  $(x_0, y_0) \in \Delta$ , il existe un intervalle ouvert  $I_{(x_0, y_0)}$  maximal sur lequel on a une unique solution maximale  $\phi_t(x_0, y_0)$  de classe  $C^r$  qui satisfait la condition initiale  $\phi_0(x_0, y_0) = (x_0, y_0)$ .*

Si  $p$  et  $q$  sont des polynômes en  $x$  et en  $y$  à coefficients dans  $\mathbb{R}$ , i.e.  $p, q \in \mathbb{R}[x, y]$ , alors le système différentiel est dit *polynomial*. La classe de tous les systèmes différentiels polynomiaux dans le plan  $\mathbb{R}^2$  (ou champs de vecteurs polynomiaux dans le plan  $\mathbb{R}^2$ ) sera dénotée par **SP**.

Considérons un système  $S \in \mathbf{SP}$ . On définit le *degré de  $S$*  comme  $\deg(S) = \max(\deg(p), \deg(q))$ . On appelle *système différentiel quadratique* un système  $S \in \mathbf{SP}$  avec  $\deg(S) = 2$ . On notera **QS** la classe des systèmes différentiels quadratiques.

Une *solution* (maximale) pour un tel système  $S$  est une courbe  $\Gamma(t) = (x(t), y(t))$  définie dans son intervalle maximal  $(a, b)$  qui vérifie le système sur  $(a, b)$ .

Le *flot* d'un système est la fonction  $\phi : (t, (x, y)) \mapsto \phi_t(x, y)$  qui associe à tout point  $(x, y)$  de  $\Delta$  l'unique solution  $\phi_t(x, y)$  du système tel que  $t \in (a, b)$  et  $\phi_0(x, y) = (x, y)$ .

Une fonction  $F : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^1$ , où  $\Delta$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^2$ , est une *intégrale première* sur  $\Delta$  d'un système (0.1) si  $F$  est constante sur toutes les courbes solutions  $(x(t), y(t))$  dans  $\Delta$ .

L'image  $\text{Im } \Gamma(t) = \{(x(t), y(t)) \mid t \in (a, b)\}$ , où  $(a, b)$  est l'intervalle maximal de la solution dans  $\Delta$ , s'appelle *courbe de phase* ou *orbite* de la solution  $\Gamma$ .

Le *portrait de phase* d'un système (0.1) est défini comme étant la partition de l'espace de phase en courbes de phase orientées (dans le sens positif de  $t$ ). Deux systèmes  $S_1, S_2$  de la forme (0.1) définis sur deux ouverts  $\Delta_1, \Delta_2 \in \mathbb{R}^2$  sont *topologiquement équivalents* si et seulement si il existe un homéomorphisme  $\psi : \Delta_1 \rightarrow \Delta_2$  qui envoie les courbes de phase de  $\Delta_1$  sur  $\Delta_2$  en préservant leur orientation.

Si la solution étudiée est périodique, c'est-à-dire s'il existe  $T \in \mathbb{R}$  tel que  $\Gamma(t) = \Gamma(t + T)$ , on dira que la courbe de phase, ou l'orbite, est *périodique*. Un *cycle limite* est une orbite périodique isolée dans l'ensemble des orbites périodiques.



FIGURE 0.1. Différentes courbes de phases.

Les *séparatrices* d'un système différentiel sont des courbes dans le portrait de phase qui délimitent des régions où l'on a des comportements différents des courbes de phase. Pour plus de détails, voir le chapitre 2.

Par exemple, considérons le système défini par  $\dot{x} = x$  et  $\dot{y} = -y$  représenté à la figure 0.2. Dans ce cas, les intervalles  $(-\infty, 0)$  et  $(0, \infty)$  de l'axe  $Ox$  sont des séparatrices, ainsi que les orbites sur l'axe  $Oy$ . Ces séparatrices délimitent 4 régions du plan.

On appelle *configuration en séparatrices* d'un système différentiel polynômial planaire la collection de courbes constituée de toutes les séparatrices et d'une seule courbe de phase par région.



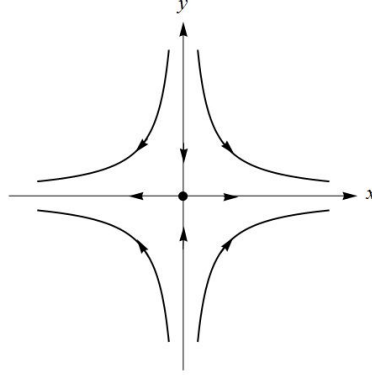
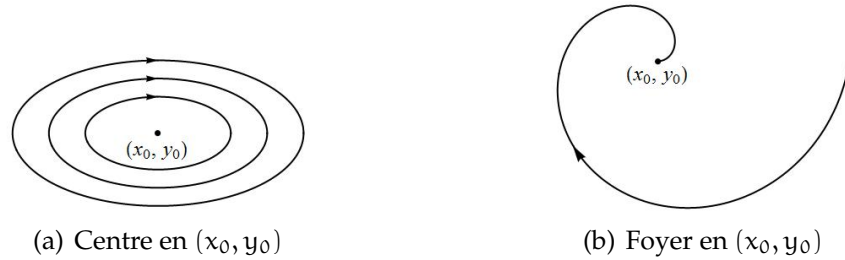


FIGURE 0.2. Séparatrices

Une *singularité*, ou un *point singulier*, du système (0.1) est un point  $(x_0, y_0)$  qui est racine commune de  $p(x, y) = 0$  et  $q(x, y) = 0$ . Ce type de point est un *point fixe* du flot. La singularité  $(x_0, y_0)$  est un *centre* si elle est isolée et s'il existe un voisinage autour du point tel que pour toute condition initiale dans ce voisinage, la solution est périodique. Les valeurs propres du linéarisé d'un système évalué en un point  $(x_0, y_0)$  nous informe sur la nature de ce point. En particulier, si on obtient des valeurs propres purement imaginaires, i.e.  $\mu_{1,2} = \pm\beta i$ , avec  $\beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , il y a deux possibilités : centre ou foyer. On dira que le point est un *foyer faible* s'il n'est pas un centre. Un *foyer fort* est un point singulier tel que les valeurs propres du linéarisé sont de la forme  $\mu_{1,2} = \alpha \pm \beta i$ , avec  $\alpha\beta \neq 0$ . Les points singuliers et les orbites périodiques sont des éléments clés dans l'étude des portraits de phase.

FIGURE 0.3. Deux types de singularité en  $(x_0, y_0)$ .

De manière plus générale, on peut étudier des familles de systèmes d'équations, en y insérant des paramètres. Plus le nombre de paramètres est élevé, plus l'étude de la famille peut être complexe.

Supposons qu'on a une famille de systèmes de la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{x} &= p(\lambda, x, y) \\ \dot{y} &= q(\lambda, x, y) \end{cases} \quad (0.4)$$

où  $p$  et  $q$  sont des polynômes en  $x$  et  $y$  à coefficients réels dépendant de  $\lambda \in \mathbb{R}^n$ , avec  $\max(\deg(p), \deg(q)) = 2$ . Alors, on peut définir un *point de bifurcation* comme étant une valeur  $\lambda_0$  du paramètre  $\lambda$  pour lequel tout voisinage contient au moins deux valeurs  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  dont les portraits de phase sont topologiquement différents. Parmi ces changements qualitatifs, on peut compter par exemple l'apparition d'un cycle limite, la disparition d'une orbite périodique ou un changement du nombre de points fixes.

On appelle *ensemble de bifurcation d'une famille de systèmes* l'ensemble de tous ses points de bifurcations. On appelle *diagramme de bifurcation* le triplet formé de l'espace des paramètres, l'ensemble de bifurcation et la fonction qui attache à chaque point  $\lambda$  de l'espace des paramètres le portrait de phase correspondant au système de paramètre  $\lambda$ . Ces diagrammes sont très utiles pour visualiser l'effet de la variation des paramètres sur le comportement des solutions ainsi que pour comprendre la dynamique des systèmes.

## HENRI POINCARÉ

La théorie des systèmes polynomiaux a été fondée par Henri Poincaré entre 1881 et 1886. Après avoir achevé sa thèse de doctorat en 1879 sous la supervision de Charles Hermite, il a développé l'étude des systèmes polynomiaux planaires dans la série de mémoires "Sur les courbes définies par une équation différentielle" [23], [24]. Avant cela, certains de ses prédécesseurs, comme Darboux [10], avaient abordé l'étude des équations différentielles polynomiales dans le plan complexe entier. Toutefois, à cette époque, les travaux des analystes, en particulier Weierstrass et Cauchy, contenaient plutôt des résultats à caractère local, c'est-à-dire dans un voisinage d'un point donné. C'est Poincaré qui a lancé l'étude géométrique globale qualitative de ces systèmes.

Comme l'a mentionné Poincaré dès le premier paragraphe de sa série de mémoires, « si l'on voulait se restreindre aux cas que l'on peut étudier avec des intégrales définies ou indéfinies, le champ de nos recherches serait singulièrement diminué, et l'immense majorité des questions qui se présentent dans les applications demeurerait insolubles » [23]. Poincaré est le premier à développer une méthode d'analyse qualitative globale des systèmes différentiels polynomiaux et ses techniques d'analyse qualitative permettent de comprendre le comportement de systèmes polynomiaux autour d'un point singulier sans avoir à connaître les solutions. Il a introduit les notions à caractère local, de noeud, point de selle, foyer et centre. Il a aussi introduit des notions à caractère

global, tel que la compactification de Poincaré, très utile pour l'étude qualitative globale de systèmes polynomiaux. C'est également lui qui a introduit la notion d'un cycle limite. Sa plus grande motivation dans ses travaux venait de son intérêt pour le problème de la stabilité du système solaire.

## LE SEIZIÈME PROBLÈME D'HILBERT

À l'aube du XX<sup>e</sup> siècle, David Hilbert, reconnu entre autre pour l'axiomatisation de la géométrie et ses travaux sur l'analyse fonctionnelle, élabore une liste qui contribuera grandement au développement des mathématiques. Cette liste, dont Hilbert a fait la lecture au Congrès international de mathématiques à Paris en 1900, contient vingt-trois problèmes qui allaient être centraux au cours des décennies à venir. La plupart de ces problèmes ont pu être résolus à un moment ou à un autre, mais trois sont toujours ouverts. Parmi eux, le seizième se divise en deux parties. La première s'énonce ainsi :

1. Quelles sont les positions relatives des branches de courbes algébriques réelles ? Et celles de surfaces algébriques réelles ?

La seconde partie porte sur les systèmes différentiels polynomiaux, c'est-à-dire aux systèmes de la forme (0.1) avec  $p, q$  des polynômes en  $x, y$  à coefficients dans  $\mathbb{R}$ . Soit  $m$  un nombre naturel et considérons la classe  $\mathbf{SP}_m$  des systèmes polynomiaux de degré  $m$ . Soit  $S \in \mathbf{SP}_m$  et soit  $LC(S)$  le nombre de cycles limites de  $S$ . On définit  $H(m) = \max\{LC(S) \mid S \in \mathbf{SP}_m\}$ .

2. Que vaut  $H(m)$  ? Et quelles sont les positions relatives des cycles limites ? Dans [17], Ilyashenko affirme :

*At the time of the discovery of limit cycles more than one hundred years ago, Poincaré posed the question of whether the number of these cycles is finite for polynomial vector fields. He proved that the answer is yes for fields not having polycycle (separatrix polygons).*

(Lors de la découverte des cycles limites il y a plus de cent ans, Poincaré a posé la question à savoir si ces cycles sont en nombre fini pour les champs de vecteurs polynomiaux. Il a prouvé que la réponse est oui pour les champs n'ayant pas de polycycle (polygone de séparatrices).)

**Remarque :** La définition ci-dessus de  $H(m)$  suppose que  $LC(S)$  est un entier pour tout  $S \in \mathbf{SP}_m$  et que le maximum de l'ensemble  $\{LC(S) \mid S \in \mathbf{SP}_m\}$  existe, et donc que  $H(m)$  est un nombre fini. Si ceci est vrai, alors  $H(m)$  est une constante globale associée à la classe de tous les systèmes de  $\mathbf{SP}_m$ . Par contre,  $LC(S)$  est une constante locale attachée à chaque système  $S$  de  $\mathbf{SP}_m$ .

Près d'un quart de siècle après que ce problème soit posé, en 1922, Henri Dulac publie un article dans le Bulletin de la Société Mathématique de France où il propose une démonstration de l'énoncé de Poincaré à l'effet que tout champ de vecteurs polynomial fixé possède un nombre fini de cycles limites [11]. Il s'agit alors de la première avancée notable par rapport au seizième problème. Toutefois, près de soixante ans plus tard, soit en 1981, Y. Ilyashenko surprend toute la communauté mathématique en découvrant une erreur dans la preuve du théorème de Dulac. Il a fallu attendre encore dix ans pour répondre de nouveau à cette question. De façon indépendante, Ilyashenko et Écalle ont proposé chacun une nouvelle preuve du théorème de Poincaré-Dulac [13] [17].

Néanmoins, si on s'intéresse à la famille de toutes les équations quadratiques, on ne sait pas si  $H(2)$  soit un nombre fini. Considérant que depuis plus d'un siècle, aucun exemple n'a été trouvé contenant plus de quatre cycles limites, une conjecture serait que  $H(2) = 4$ .

Dans la production des cycles limites, les centres et les foyers faibles jouent un rôle très important. Par exemple, on a le théorème de Bautin disant que toute perturbation quadratique d'un système quadratique à centre ou à foyer faible produit un maximum de trois cycles limites au voisinage de cette singularité [8]. Ce théorème est par ailleurs le premier résultat important touchant les systèmes quadratiques. L'étude de la classe des systèmes à centre ou à foyer faible permet donc de cerner une partie du seizième problème d'Hilbert pour les systèmes quadratiques. De plus, tous les exemples connus de champ de vecteurs ayant quatre cycles limites ont été obtenus en utilisant une perturbation d'un champ de vecteurs quadratique ayant un foyer faible d'ordre trois, ce qui motive d'autant plus la compréhension de cette famille.

Ce seizième problème est toujours ouvert, même dans le cas quadratique, où  $m = 2$ . D'ailleurs, il se retrouve à la treizième position d'une nouvelle liste de problèmes énoncée par Smale et parue en 1998, inspirée par celle de Hilbert [31]. Cette liste a été rédigée en réponse à l'invitation de V.I Arnold qui, au nom de l'Union mathématique internationale, souhaitait que l'on détermine les grands problèmes du siècle à venir. Dans son article, Smale écrit d'ailleurs, en faisant référence au seizième problème d'Hilbert, que "il s'agit, à l'exception de l'hypothèse de Riemann, du problème d'Hilbert le plus insaisissable" [31].

## PRÉSENTATION DU MÉMOIRE

Le travail qui suit se divise en quatre chapitres. Le chapitre 1 débute en introduisant quelques notions de base. On expose ce que l'on entend par une action de groupe sur un ensemble, puis on explique en quoi consiste le plan projectif de dimension deux et la compactification de Poincaré. On poursuit au chapitre 2 avec le problème de classification des systèmes polynomiaux planaires, suivi de la détermination de la forme normale de Li pour la famille au coeur de ce travail, soit celle des systèmes quadratiques différentiels ayant un foyer faible d'ordre 3. Aux chapitres 3 et 4, on peut alors énoncer, démontrer et analyser deux nouveaux théorèmes affirmant que l'action du groupe des transformations affines et des homothéties du temps permet d'identifier certaines parties distinctes du diagramme de bifurcation. Le premier théorème (théorème 3.1) est basé sur la forme normale de Li alors que le deuxième (théorème 4.1) est basé sur celle de Bautin, introduite au chapitre 4. Ce deuxième théorème nous permet de construire l'espace quotient par l'action du groupe des systèmes à foyer faible d'ordre trois. Ce nouveau résultat forme le contenu du théorème 4.2 Le travail se termine par une brève conclusion. Bonne lecture !



# Chapitre 1

---

## NOTIONS DE BASE

### 1.1. ACTION DE GROUPE

Soit  $(G, \cdot)$  un groupe, et  $X$  un ensemble. Une action (à gauche) du groupe  $G$  sur l'ensemble  $X$  est une application

$$\begin{aligned} G \times X &\longrightarrow X \\ (g, x) &\longmapsto g \cdot x \end{aligned}$$

telle que

- (1)  $e \cdot x = x \quad \forall x \in X$ , où  $e$  est l'élément neutre de  $G$  ;
- (2)  $g_1 \cdot (g \cdot x) = (g_1 g) \cdot x \quad \forall x \in X, \forall g, g_1 \in G$ .

On dit alors que le groupe  $G$  agit (à gauche) sur l'ensemble  $X$ .

Une *relation d'équivalence*  $\sim$  sur un ensemble  $X$  est une relation réflexive ( $\forall x \in X, x \sim x$ ), symétrique ( $\forall x, y \in X$ , si  $x \sim y$  alors  $y \sim x$ ) et transitive ( $\forall x, y, z \in X$ , si  $x \sim y$  et  $y \sim z$ , alors  $x \sim z$ ).

Pour tout  $x \in X$ , on peut définir la *classe d'équivalence de  $x$* , notée  $[x]$ , comme  $\{y \in X \mid y \sim x\}$ . On a alors la proposition suivante :

**Proposition 1.1.** *Soit  $X$  un ensemble. Toute relation d'équivalence sur  $X$  induit une partition de  $X$ .*

DÉMONSTRATION. D'abord, on a clairement  $\bigcup_{x \in X} [x] = X$ . Maintenant, soit  $x, y \in X$ . Si  $x \sim y$ , on aura  $[x] = [y]$  par symétrie. Si  $x \not\sim y$ , alors on a  $[x] \cap [y] = \emptyset$  par transitivité et symétrie.  $\square$

Considérons un ensemble  $X$  et une relation d'équivalence  $\sim$  sur  $X$ . Les éléments de  $X$  peuvent être de différentes natures, telles que par exemple, des courbes algébriques, des espaces topologiques, des équations différentielles, etc. L'ensemble  $X/\sim = \{[x] \mid x \in X\}$  est appelé *l'ensemble quotient de  $X$  par rapport*

$\sim$ . Un *système de représentants* pour  $X/\sim$  est un ensemble  $A \subseteq X$  tel que pour toute classe  $[x] \in X/\sim$ , il existe un unique élément  $y \in X$  tel que  $y \in [x]$  et  $y \in A$ . On dit qu'un *problème de classification de  $X$  par rapport à la relation d'équivalence  $\sim$*  est résolu si on trouve un système de représentants des classes d'équivalence.

Une action de groupe induit une relation d'équivalence. En effet, si on a un ensemble  $X$  et un groupe  $G$  qui agit sur  $X$ , on aura la relation d'équivalence suivante : deux éléments  $x, y \in X$  sont équivalents si et seulement si il existe  $g \in G$  tel que  $y = gx$ . Dans ce cas-ci, la classe d'équivalence  $[x]$  de  $x$  est appelée *l'orbite de  $x$  sous l'action de  $G$*  et est notée  $\text{Orb}(x)$ .

Tout ensemble  $X$  doté d'une relation d'équivalence  $\sim$  permet de définir un *invariant*, c'est-à-dire une application  $I : X \rightarrow Y$  où pour tout  $x_1, x_2 \in X$ ,  $x_1 \sim x_2 \Rightarrow I(x_1) = I(x_2)$ . L'exemple le plus simple est l'application canonique  $X \rightarrow X/\sim$ . Si  $X$  est muni d'une topologie, on voudrait que  $X/\sim$  soit aussi un espace topologique. C'est *l'espace topologique quotient* de  $X$  par  $\sim$ .

Considérons la classe **SP**, c'est-à-dire la classe des systèmes de la forme

$$\begin{aligned}\dot{x} &= p(x, y) \\ \dot{y} &= q(x, y)\end{aligned}$$

où  $p, q \in \mathbb{R}[x, y]$ . Il existe deux actions de groupe agissant sur **SP**, soit le groupe des transformations affines sur  $\mathbb{R}^2$  noté  $\text{Aff}(\mathbb{R}, 2)$ , et les homothéties sur le temps noté  $\mathbb{R}^*$ .

### 1.1.1. Transformations affines

Le groupe des transformations affines sur  $\mathbb{R}^2$ , soit  $\text{Aff}(2, \mathbb{R})$ , contient toutes les transformations affines  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  avec

$$\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \quad \text{où } a_{ij} \in \mathbb{R}, b_k \in \mathbb{R} \text{ et } \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$$

dont l'inverse est

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = T^{-1} \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}^{-1} \left[ \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \right].$$

Alors, si on a un système  $S \in \mathbf{SP}_m$  de la forme

$$S = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p(x, y) \\ q(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_0 + p_1(x, y) + \dots + p_m(x, y) \\ q_0 + q_1(x, y) + \dots + q_m(x, y) \end{pmatrix}$$



avec  $p_i, q_i$  des polynômes homogènes de degré  $i$  où  $0 \leq i \leq m$ , le groupe  $\text{Aff}(2, \mathbb{R})$  agit sur  $S$  de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \text{Aff}(2, \mathbb{R}) \times \mathbf{SP}_m &\longrightarrow \mathbf{SP}_m \\ (T, S) &\longmapsto \tilde{S} = T \cdot S = TS. \end{aligned}$$

Le système transformé  $\tilde{S}$  sera donné par

$$\begin{aligned} \tilde{S} = \begin{pmatrix} \dot{\tilde{x}} \\ \dot{\tilde{y}} \end{pmatrix} &= TS = T \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} \\ &= T \begin{pmatrix} p(x, y) \\ q(x, y) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (p \circ T^{-1})(\tilde{x}, \tilde{y}) \\ (q \circ T^{-1})(\tilde{x}, \tilde{y}) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \tilde{p}(\tilde{x}, \tilde{y}) \\ \tilde{q}(\tilde{x}, \tilde{y}) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Il est clair que  $\tilde{S} \in \mathbf{SP}_m$ . L'application  $\text{Aff}(2, \mathbb{R}) \times \mathbf{SP}_m \rightarrow \mathbf{SP}_m$  vérifie les conditions nécessaires pour être une action de groupe à gauche. Pour tout sous-groupe  $G$  de  $\text{Aff}(2, \mathbb{R})$ , on aura aussi une action induite sur  $\mathbf{SP}_m$ . En particulier, nous avons le sous-groupe  $\text{GL}(2, \mathbb{R})$  des transformations linéaires de  $\mathbb{R}^2$  et le sous-groupe  $T$  des translations.

### 1.1.2. Homothéties du temps

Soit  $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Alors,  $(\mathbb{R}^*, \cdot)$  forme un groupe par rapport à la multiplication. Chaque élément  $\lambda$  de ce groupe engendre une homothétie  $H : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  avec  $H_\lambda(t) = \lambda t$ , où  $\lambda \in \mathbb{R}^*$ . Cela engendre une action sur  $\mathbf{SP}_m$  comme suit :

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^* \times \mathbf{SP}_m &\longrightarrow \mathbf{SP}_m \\ (\lambda, S) &\longmapsto \tilde{S} = \lambda \cdot S. \end{aligned}$$

On pose  $t = \lambda \tilde{t}$  et on définit  $\tilde{S}$  :

$$\tilde{S} = \begin{cases} \dot{\tilde{x}} = \frac{dx}{d\tilde{t}} = \frac{dx}{dt} \frac{dt}{d\tilde{t}} = \lambda p(x, y) \\ \dot{\tilde{y}} = \frac{dy}{d\tilde{t}} = \frac{dy}{dt} \frac{dt}{d\tilde{t}} = \lambda q(x, y). \end{cases}$$

Au cours du manuscrit, on considère le groupe  $\mathbf{G} = \text{Aff}(\mathbb{R}, 2) \times \mathbb{R}^*$ , agissant sur  $\mathbf{SP}_m$  :

$$\begin{aligned} \mathbf{G} \times \mathbf{SP}_m &\longrightarrow \mathbf{SP}_m \\ ((T, \lambda), S) &\longmapsto \tilde{S} = \lambda TS. \end{aligned}$$

Considérons la relation d'équivalence induite par l'action du groupe  $\mathbf{G}$  sur  $\mathbf{SP}_m$  : deux systèmes  $S_1, S_2 \in \mathbf{SP}_m$  sont équivalents par rapport à l'action de  $\text{Aff}(2, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}^*$  si et seulement si il existe une transformation affine et une homothétie du temps envoyant  $S_1$  sur  $S_2$ . En autres mots,  $S_1 \sim S_2$  si et seulement si  $\exists g \in \mathbf{G}$  tel que  $S_1 = gS_2$ . Alors, on a  $\text{Orb}(S) = \{\tilde{S} = gS \mid g \in \mathbf{G}\}$  et  $\mathbf{SP}_m / \sim = \{\text{Orb}(S) \mid S \in \mathbf{SP}_m\}$ .

## 1.2. ESPACE PROJECTIF DE DIMENSION DEUX

Soit  $E = \mathbb{R}^3 \setminus \{0, 0, 0\}$  et considérons la relation d'équivalence définie comme suit :

$$(X, Y, Z) \sim (X', Y', Z') \iff \exists \lambda \in \mathbb{R}^* \text{ tel que } (X', Y', Z') = \lambda(X, Y, Z).$$

On considère les classes d'équivalence

$$[(X, Y, Z)] = \{(X', Y', Z') \in E \mid (X', Y', Z') \sim (X, Y, Z)\}.$$

Ces classes sont notées  $[X : Y : Z]$ . On peut alors former l'ensemble quotient  $E/\sim = \{[X : Y : Z] \mid (X, Y, Z) \in E\}$ . On considère l'application  $\pi : E \rightarrow E/\sim$ . L'ensemble  $E/\sim$  muni de la topologie induite par  $\pi$  est appelé *l'espace projectif de dimension deux* (ou *plan projectif réel*) et est noté par  $P_2(\mathbb{R})$ . Cet espace a seulement deux dimensions. En effet, puisque  $(X, Y, Z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ , on a soit  $X \neq 0$ , soit  $Y \neq 0$  ou bien  $Z \neq 0$ . Supposons  $Z \neq 0$ . En divisant  $(X, Y, Z)$  par  $Z$ , on obtient  $(\frac{X}{Z}, \frac{Y}{Z}, 1) = (X', Y', 1)$  avec  $(X', Y') \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ .

Il est possible de construire autrement cet espace. Considérons la sphère  $S^2$ , les points  $p_1, p_2 \in S^2$  et la relation d'équivalence suivante :  $p_1 \sim p_2 \iff p_1 = p_2$  ou  $p_1 = -p_2$ . On a alors les classes d'équivalence  $[p] = \{q \in S^2 \mid q \sim p\}$ . Ces classes d'équivalence correspondent à l'intersection des droites passant par  $(0, 0, 0)$  avec  $S^2$ . L'espace projectif de dimension deux est alors défini comme étant l'ensemble de ces classes d'équivalence, i.e.  $P_2(\mathbb{R}) = \{[p] \mid p \in S^2\} = S^2 / \sim$ .

Cette définition est équivalente à celle énoncée au paragraphe précédent, car on a la transformation suivante  $P_2(\mathbb{R}) \longrightarrow S^2 / \sim$  :

$$[(X, Y, Z)] \rightarrow \left[ \left( \frac{X}{\pm\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}}, \frac{Y}{\pm\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}}, \frac{X}{\pm\sqrt{Y^2 + Z^2}} \right) \right],$$

où

$$\left( \frac{X}{\pm\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}}, \frac{Y}{\pm\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}}, \frac{Z}{\pm\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}} \right) \in S^2.$$

On cherche à présent un système de représentants pour  $S^2/\sim$ . Un tel système n'est pas unique, et on peut choisir par exemple

$$A = \{p \in S^2 \mid p = (x, y, z), z > 0\} \cup \{p \in S^2 \cap \{z = 0\} \mid p = (x, y, z), x > 0\} \cup \{(0, 1, 0)\}.$$

Afin de mieux se représenter cet ensemble  $A$ , on peut le projeter verticalement sur le disque  $x^2 + y^2 \leq 1$ .

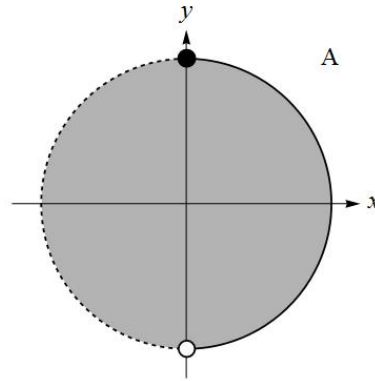


FIGURE 1.1. Ensemble  $A$

La fonction  $P_2(\mathbb{R}) \rightarrow S^2/\sim$  est une bijection. En effet, tout point de  $P_2(\mathbb{R})$  détermine uniquement une droite passant par l'origine qui coupe la sphère en deux points diamétralement opposés, ce qui donne la même classe dans  $S^2/\sim$  et évidemment, cette application est injective. Réciproquement, tout point  $p$ ,  $-p$  dans  $S^2/\sim$  définissent une seule droite passant par l'origine, donc un point de  $P_2(\mathbb{R})$ .

### 1.3. COMPACTIFICATION DE POINCARÉ

#### 1.3.1. Compactification de Poincaré sur la sphère

Les principales idées de la projection centrale d'un champ de vecteurs polynomial d'un plan sur la sphère proviennent encore une fois du *Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle*, de H. Poincaré [23]. Ce dernier a énoncé un théorème affirmant qu'on peut compactifier un champ de vecteurs polynomial dans le plan, sur la sphère. Ce théorème a été démontré en 1969 par E. A. Gonzalez Velasco dans [14].

Considérons l'espace  $\mathbb{R}^3$  de coordonnées  $(X, Y, Z)$ . Alors, on peut considérer notre plan  $\mathbb{R}^2$  de coordonnées  $(x, y)$  comme étant le plan  $Z = 1$ , c'est-à-dire que

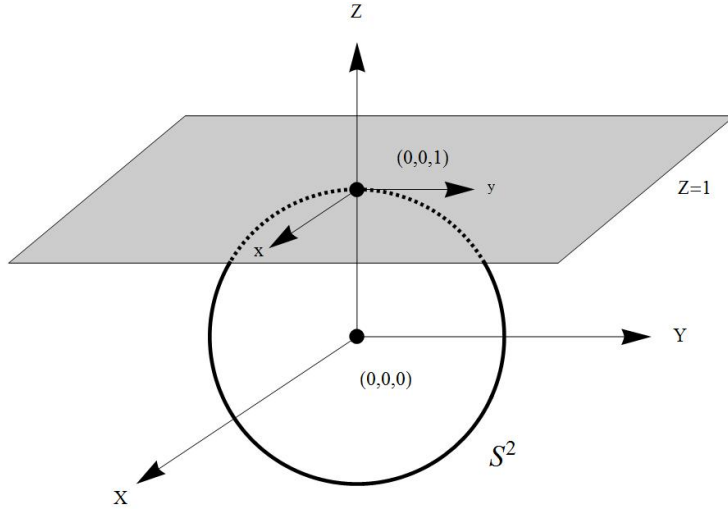


FIGURE 1.2. Le plan  $Z = 1$  est tangent à la sphère  $S^2$  au point  $(0, 0, 1)$ .

$\mathbb{R}^2 = \{(X, Y, Z) \in \mathbb{R}^3 \mid Z = 1\}$ . On a la sphère  $S^2 = \{(X, Y, Z) \in \mathbb{R}^3 \mid X^2 + Y^2 + Z^2 = 1\}$ . Cette sphère est tangente à  $\mathbb{R}^2$  au point  $(0, 0, 1)$ .  $S^2$  est une variété différentiable couverte par les six voisinages suivants :

$$\begin{aligned} U_X &= \{P \in S^2 \mid X > 0\} & V_X &= \{P \in S^2 \mid X < 0\} \\ U_Y &= \{P \in S^2 \mid Y > 0\} & V_Y &= \{P \in S^2 \mid Y < 0\} \\ U_Z &= \{P \in S^2 \mid Z > 0\} & V_Z &= \{P \in S^2 \mid Z < 0\} \end{aligned}$$

avec les six cartes  $(U_i, \phi_i)$  et  $(V_i, \psi_i)$ ,  $i \in \{X, Y, Z\}$  où :

$$\begin{aligned} \phi_X : U_X &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \text{ avec } \phi_X(P) = \left( \frac{Y}{X}, \frac{Z}{X} \right) & \psi_X : V_X &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \text{ avec } \psi_X(P) = \left( \frac{Y}{X}, \frac{Z}{X} \right) \\ \phi_Y : U_Y &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \text{ avec } \phi_Y(P) = \left( \frac{X}{Y}, \frac{Z}{Y} \right) & \psi_Y : V_Y &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \text{ avec } \psi_Y(P) = \left( \frac{X}{Y}, \frac{Z}{Y} \right) \\ \phi_Z : U_Z &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \text{ avec } \phi_Z(P) = \left( \frac{X}{Z}, \frac{Y}{Z} \right) & \psi_Z : V_Z &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \text{ avec } \psi_Z(P) = \left( \frac{X}{Z}, \frac{Y}{Z} \right). \end{aligned}$$

On s'intéresse à la projection centrale d'un champ de vecteurs polynomial  $\xi$  de degré  $n$  du plan  $\mathbb{R}^2$ , sur la sphère  $S^2$ . On notera  $s = (s_1, s_2)$  la valeur de  $\phi_i$  ou de  $\psi_i$ ,  $i \in \{X, Y, Z\}$ . Pour chaque point  $r = (r_1, r_2) = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ , la projection centrale associe deux points opposés  $P = (X, Y, Z)$  et  $-P = (-X, -Y, -Z)$  sur la sphère. Ces points sont définis comme étant

$$P = f^+(r) = \left( \frac{x}{\Delta(r)}, \frac{y}{\Delta(r)}, \frac{1}{\Delta(r)} \right) \quad \text{et} \quad -P = f^-(r) = - \left( \frac{x}{\Delta(r)}, \frac{y}{\Delta(r)}, \frac{1}{\Delta(r)} \right)$$

avec  $\Delta(r) = \sqrt{(x^2 + y^2 + 1)}$ . La projection induit alors deux champs de vecteurs sur  $S^2$ , un sur l'hémisphère nord  $H_+$  ( $Z > 0$ ) et l'autre sur l'hémisphère sud  $H_-$  ( $Z < 0$ ). Si  $df_r^+$  et  $df_r^-$  sont les différentielles de  $f^+$  et  $f^-$  en  $r$ , alors chaque vecteur  $\xi(r)$  est associé aux deux vecteurs suivant sur  $S^2$  :  $df_r^+(\xi(r))$  et  $df_r^-(\xi(r))$ .

Afin d'étudier les points à l'infini, il serait utile de compléter les champs induits sur  $H_+ \cup H_-$  avec l'équateur  $S^1$ . Le théorème suivant nous permet d'y arriver.

**Théorème 1.1.** [14] *Le champ induit sur  $S^2 \setminus S^1$  par les différentielles de  $f^+$  et  $f^-$  peut être prolongé analytiquement à la sphère complète  $S^2$  après une multiplication par un facteur  $Z^{n-1}$ , où  $n$  est le degré du champ polynomial considéré, et tel que l'équateur  $S^1$  soit invariant par le flot.*

DÉMONSTRATION. Calculons d'abord le champ induit pour  $P \in U_X$ . L'application associée est  $\phi_X : U_X \rightarrow \mathbb{R}^2$  et on obtient

$$s = \phi_X(P) = \left( \frac{Y}{X}, \frac{Z}{X} \right).$$

Étant donné  $r = (r_1, r_2) = (x, y) \in \{Z = 1\}$ , le point correspondant à  $r$  sur  $S^2$  par projection centrale est

$$X = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1}}, \quad Y = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1}} \quad \text{et} \quad Z = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1}},$$

et on a

$$\frac{Y}{X} = \frac{y}{x} \quad \text{et} \quad \frac{Z}{X} = \frac{1}{x}.$$

Donc,

$$s = (s_1, s_2) = \left( \frac{y}{x}, \frac{1}{x} \right).$$

La différentielle de  $f$  est donnée par la matrice

$$(df_r^+) = \frac{\partial s_i}{\partial r_j} = \begin{bmatrix} -\frac{y}{x^2} & \frac{1}{x} \\ -\frac{1}{x^2} & 0 \end{bmatrix}$$

pour  $P = f^+(r)$  dans l'hémisphère supérieure. Si on applique la différentielle au champ de vecteurs  $\xi(r) = (p(r), q(r))$ , alors on a

$$\begin{aligned}
df_r^+(\xi(r)) &= \begin{bmatrix} \frac{-y}{x^2} & \frac{1}{x} \\ \frac{-1}{x^2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p(r) \\ q(r) \end{bmatrix} \\
&= \left(\frac{1}{x}\right)^2 [x q(r) - y p(r), -p(r)] \\
&= \left(\frac{Z}{X}\right)^2 \left[ \frac{X}{Z} q\left(\frac{X}{Z}, \frac{Y}{Z}\right) - \frac{Y}{Z} p\left(\frac{X}{Z}, \frac{Y}{Z}\right), -p\left(\frac{X}{Z}, \frac{Y}{Z}\right) \right].
\end{aligned}$$

Pour  $P = f^-(r)$ , les calculs mènent au même résultat. On a donc un champ de vecteur induit, différentiable et défini partout, sauf sur l'équateur  $S^1$  car le champ n'est pas borné à l'approche de  $S^1$ . Afin d'obtenir un champ différentiable sur toute la surface de la sphère, on peut d'abord multiplier le champ induit dans la carte  $(U_X, \phi_X)$  par le facteur  $Z^{n-1}$ , où  $n$  est le degré de  $\xi$ . Les points singuliers et les orbites sont transférées sur la sphère en conservant toutes les propriétés topologiques du portrait de phase, sauf que leur orientation est inversée dans l'hémisphère inférieure si  $n$  est pair. En effet, si on multiplie le champ précédent par  $Z^{n-1}$ , on obtient

$$\begin{aligned}
&\frac{Z^{n+1}}{X^2} \left[ \frac{X}{Z} q\left(\frac{X}{Z}, \frac{Y}{Z}\right) - \frac{Y}{Z} p\left(\frac{X}{Z}, \frac{Y}{Z}\right), -p\left(\frac{X}{Z}, \frac{Y}{Z}\right) \right] \\
&= \frac{Z^n}{X} \left[ q\left(\frac{X}{Z}, \frac{Y}{Z}\right) - \frac{Y}{X} p\left(\frac{X}{Z}, \frac{Y}{Z}\right), -\frac{Z}{X} p\left(\frac{X}{Z}, \frac{Y}{Z}\right) \right].
\end{aligned}$$

Puisque  $(s_1, s_2) = (\frac{y}{x}, \frac{1}{x})$ ,  $Z = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+1}}$  et en calculant

$$\frac{s_2^2}{\Delta(s)^2} = \frac{s_2^2}{1 + s_1^2 + s_2^2} = \frac{\frac{1}{x^2}}{1 + \frac{y^2}{x^2} + \frac{1}{x^2}} = \frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{x^2+y^2+1}{x^2}} = \frac{1}{x^2 + y^2 + 1} = Z^2,$$

alors on a

$$\begin{aligned}
&\frac{Z^n}{X} \left[ q\left(\frac{X}{Z}, \frac{Y}{Z}\right) - \frac{Y}{X} p\left(\frac{X}{Z}, \frac{Y}{Z}\right), -\frac{Z}{X} p\left(\frac{X}{Z}, \frac{Y}{Z}\right) \right] \\
&= \frac{s_2^n}{\Delta(s)^{n-1}} \left[ q\left(\frac{1}{s_2}, \frac{s_1}{s_2}\right) - s_1 p\left(\frac{1}{s_2}, \frac{s_1}{s_2}\right), -s_2 p\left(\frac{1}{s_2}, \frac{s_1}{s_2}\right) \right].
\end{aligned}$$

Le calcul de  $df_r^+(\xi)$  pour  $P \in U_Y$  dans l'hémisphère supérieur est similaire, et mène à

$$(df_r^+) = \frac{\partial s_i}{\partial r_j} = \begin{bmatrix} \frac{1}{y} & \frac{-x}{y^2} \\ 0 & \frac{-1}{y^2} \end{bmatrix}.$$

En appliquant la différentielle au champ de vecteurs  $\xi(r) = (p(r), q(r))$ , on obtient

$$\begin{aligned} df_r^+(\xi(r)) &= \begin{bmatrix} \frac{1}{y} & \frac{-x}{y^2} \\ 0 & \frac{-1}{y^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p(r) \\ q(r) \end{bmatrix} \\ &= \left(\frac{1}{y}\right)^2 [y p(r) - x q(r), -q(r)] \\ &= \left(\frac{Z}{Y}\right)^2 \left[ \frac{Y}{Z} p\left(\frac{X}{Z}, \frac{Y}{Z}\right) - \frac{X}{Z} q\left(\frac{X}{Z}, \frac{Y}{Z}\right), -q\left(\frac{X}{Z}, \frac{Y}{Z}\right) \right]. \end{aligned}$$

Encore une fois, on obtient un champ de vecteur induit, différentiable et défini partout, sauf sur  $S_1$ . On peut alors multiplier le champ induit dans la carte  $(U_Y, \phi_Y)$  par  $Z^{n+1}$ , avec  $n$  le degré de  $\xi$ , et on obtient un champ de vecteur différentiable sur la carte. Les points singuliers et les orbites du champ sont conservés, mais leur orientation est inversée dans l'hémisphère inférieur, dans le cas où  $n$  est pair :

$$\begin{aligned} &\frac{Z^{n+1}}{Y^2} \left[ \frac{Y}{Z} p\left(\frac{X}{Z}, \frac{Y}{Z}\right) - \frac{X}{Z} q\left(\frac{X}{Z}, \frac{Y}{Z}\right), -q\left(\frac{X}{Z}, \frac{Y}{Z}\right) \right] \\ &= \frac{Z^n}{Y} \left[ p\left(\frac{X}{Z}, \frac{Y}{Z}\right) - \frac{X}{Y} q\left(\frac{X}{Z}, \frac{Y}{Z}\right), -\frac{Z}{Y} q\left(\frac{X}{Z}, \frac{Y}{Z}\right) \right]. \end{aligned}$$

Il est possible de calculer  $df_r^+(\xi)$  si  $P \in U_Z$  de la même manière, et en multipliant par le même facteur, on obtient

$$\frac{1}{\Delta(s)^{n-1}} [p(s_1, s_2), q(s_1, s_2)].$$

Si on a plutôt  $P \in V_X, V_Y$  ou  $V_Z$ , on obtient respectivement les mêmes expressions que pour  $P \in U_X, U_Y$  ou  $U_Z$ , mais multipliées par un facteur  $(-1)^{n-1}$ . Ce facteur provient du fait qu'on a plutôt  $Z = \frac{-s_2}{\Delta(s)}$ .

Il reste à démontrer que  $S^1$  est invariant. Supposons  $P \in S^1$ , alors  $Z = 0$ . On a  $s = (s_1, s_2) = \phi_X(P) = \left(\frac{Y}{X}, \frac{Z}{X}\right) = \left(\frac{Y}{X}, 0\right)$ . Ainsi, la seconde composante du vecteur tangent à la sphère est nulle dans la carte  $\phi_X$ . Donc,  $S^1$  est invariant par le flot.

□

On appelle *compactification de Poincaré sur la sphère* le champ de vecteur ainsi défini sur la sphère restreint à  $H_+ \cup S^1$ , où  $H_+$  est l'hémisphère nord de la sphère ( $Z > 0$ ).

### 1.3.2. Compactification de Poincaré sur le disque

On considère d'abord la compactification de Poincaré sur la sphère. Par la suite, on peut projeter verticalement le champ de vecteurs défini sur  $H_+ \cup S^1$  sur le plan et on obtient le champ de vecteurs sur *disque de Poincaré*. On a alors la *compactification de Poincaré sur le disque*. Un point  $P \in S^1$  est dit *point à l'infini* du système alors qu'un point  $P \in S^2 \setminus S^1$  est dit *point fini* du système.

La compactification de Poincaré sur le disque simplifie l'étude globale des systèmes différentiels quadratiques, car elle permet de visualiser le comportement des champs de vecteurs  $\xi$  sur un compact de dimension 2. On peut alors voir directement sur le disque le comportement des courbes de phase à l'infini ainsi que celles proches de l'infini. Les portraits de phases qui seront présentés dans le manuscrit seront tracés sur le disque de Poincaré.



## Chapitre 2

---

# SYSTÈME D'ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES QUADRATIQUES AYANT UN FOYER FAIBLE D'ORDRE TROIS

### 2.1. CLASSIFICATION DES CHAMPS DE VECTEURS PLANAIRES POLYNOMIAUX

On s'intéresse à la classification topologique de  $\mathbf{SP}$ , c'est-à-dire la classification par rapport à la relation d'équivalence topologique : deux systèmes  $S_1, S_2 \in \mathbf{SP}$  sont topologiquement équivalents si et seulement si il existe un homéomorphisme transportant les courbes de phase orientées de  $S_1$  sur les courbes de phase orientées de  $S_2$  en préservant l'orientation.

Si on inverse le temps dans un système  $S \in \mathbf{SP}$ , on obtient les mêmes orbites, mais avec l'orientation globalement inversée. Bien que cela ne permette pas de préserver la stabilité des points singuliers ni des cycles limites, il est intéressant de considérer seulement un des deux portraits de phase afin de réduire la liste de représentants de moitié. Le second portrait s'obtient facilement du premier en renversant l'orientation des flèches. On choisira donc plutôt la relation d'équivalence suivante : deux systèmes  $S_1, S_2 \in \mathbf{SP}$  sont équivalents si et seulement si il existe un homéomorphisme transportant les courbes de phase orientées de  $S_1$  sur les courbes de phase orientées de  $S_2$  en préservant ou en inversant (de façon globale) l'orientation.

À tout système de  $\mathbf{SP}$ , on peut associer son portrait de phase dans le disque de Poincaré. Toutefois, pour résoudre le problème de classification, on ne cherche pas à faire effectivement les portraits de phase car chaque portrait de phase contient une infinité de courbes. On fait plutôt la liste de ce qu'on appellera des

configurations de séparatrices, qui forment un invariant par rapport à la relation d'équivalence topologique. La théorie des séparatrices a été développée par Markus dans [20].

Considérons un système  $S \in \mathbf{SP}$ . Un point  $p \in \mathbb{R}^2$  est un *point  $\omega$ -limite* (resp.  *$\alpha$ -limite*) d'une courbe solution  $\Gamma(t, (x_0, y_0))$  s'il existe une suite  $\{t_i\}$  telle que  $\lim_{i \rightarrow \infty} t_i = \infty$  (resp.  $\lim_{i \rightarrow \infty} t_i = -\infty$ ) pour laquelle

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \Gamma(t_i, (x_0, y_0)) = p.$$

On appelle *ensemble  $\omega$ -limite* (resp.  *$\alpha$ -limite*) l'ensemble de tous les points  $\omega$ -limite (resp.  $\alpha$ -limite) d'une courbe solution  $\Gamma$ . Cet ensemble est noté  $\omega(\Gamma)$  (resp.  $\alpha(\Gamma)$ ). L'ensemble de tous les points limites de  $\Gamma$ , i.e.  $\omega(\Gamma) \cup \alpha(\Gamma)$ , est appelé *l'ensemble limite de  $\Gamma$* .

Considérons le flot  $\phi_t(x, y)$  d'un système  $S \in \mathbf{SP}$ . On a que  $\phi_t$  est un *flot parallèle* s'il est topologiquement équivalent à l'un des suivants :

- le flot défini sur  $\mathbb{R}^2$  par  $\begin{cases} \dot{x} = 1 \\ \dot{y} = 0 \end{cases}$  (flot en bandes);
- le flot défini sur  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  par  $\begin{cases} \dot{r} = 0 \\ \dot{\theta} = 1 \end{cases}$  (flot annulaire);
- le flot défini sur  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  par  $\begin{cases} \dot{r} = r \\ \dot{\theta} = 0 \end{cases}$  (flot spirale).

Considérons une région ouverte maximale sur  $\mathbb{R}^2$  pour laquelle le flot est parallèle, et considérons sa frontière dans  $\mathbb{R}^2$ . La frontière est formée d'une ou plusieurs orbites de type suivant :

- (i) point singulier;
- (ii) orbite périodique pour laquelle il n'existe pas de voisinage consistant seulement d'orbites périodiques (orbite périodique isolée);
- (iii) orbite  $\gamma(p)$  homéomorphe à  $\mathbb{R}$  pour laquelle il n'existe pas de voisinage  $N$  tel que
  - 1)  $\forall q \in N, \alpha(q) = \alpha(p)$  et  $\omega(q) = \omega(p)$ ,
  - 2) la frontière  $\partial N$  de  $N$  est formée de  $\alpha(p)$ ,  $\omega(p)$  et de deux orbites  $\gamma(q_1)$  et  $\gamma(q_2)$  tel que  $\alpha(p) = \alpha(q_1) = \alpha(q_2)$  et  $\omega(p) = \omega(q_1) = \omega(q_2)$ , avec  $q_1, q_2 \in N$ .

Au chapitre 1, on a défini les séparatrices d'un système différentiel comme étant des courbes du portrait de phase délimitant des régions avec des comportements qualitatifs distincts des courbes de phase. On peut maintenant définir

ce concept de façon plus précise. On dira qu'une courbe solution  $\Gamma$  d'un système différentiel  $S$  défini dans le plan est une *séparatrice* si elle satisfait (iii). Le *squelette en séparatrices* est l'ensemble des orbites satisfaisant (i), ou (iii). Si on ajoute les orbites satisfaisant (ii), on parlera plutôt de *squelette en séparatrices prolongé*. Si  $Q$  est le squelette en séparatrice prolongé d'un système, alors on définit une *région canonique* comme étant une composante connexe de  $\mathbb{R}^2 \setminus Q$ . On peut maintenant définir la notion de *configuration en séparatrices* comme étant l'union du *squelette en séparatrices prolongé* et d'une orbite provenant de chacune des régions canoniques.

Pour les configurations en séparatrices, la relation d'équivalence topologique s'énonce comme suit : deux configurations en séparatrices  $C_1$  et  $C_2$  d'un système  $S \in \mathbf{SP}$  sur  $\mathbb{R}^2$  sont topologiquement équivalentes s'il existe un homéomorphisme  $H : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  tel que les trajectoires de  $C_1$  sont envoyées sur les trajectoires de  $C_2$  en conservant l'orientation. On peut alors énoncer le théorème de Markus-Neumann-Peixoto, tiré de [5], qui présente la configuration en séparatrices comme un invariant par rapport à la relation d'équivalence topologique.

**Théorème 2.1.** *Soit deux flots continus  $(\mathbb{R}^2, \phi_1)$  et  $(\mathbb{R}^2, \phi_2)$  ne contenant que des points singuliers isolés. Alors,  $\phi_1$  et  $\phi_2$  sont topologiquement équivalents si et seulement si leur configuration en séparatrices  $C_1$  et  $C_2$  sont topologiquement équivalents.*

Les systèmes  $S \in \mathbf{SP}$  peuvent donc être classifiés par rapport à la relation d'équivalence sur leur configuration en séparatrices. La tâche est simplifiée puisqu'au lieu d'étudier une infinité de courbes solution d'un système  $S$ , on étudie un nombre fini de courbes dans une configuration en séparatrices  $C$ .

D'autres relations d'équivalence existent sur  $\mathbf{SP}$ , comme celle induite par l'action du groupe  $\mathbf{G} = \text{Aff}(2, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}^*$  des transformations affines et des homothéties du temps décrite à la section 1.1.2. Cette relation est plus fine que celle décrite au paragraphe précédent. En effet, si deux systèmes sont  $\mathbf{G}$ -équivalents, alors ils sont nécessairement topologiquement équivalents car ils sont difféomorphes. Si on a  $\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  définie par un couple  $(T, \lambda) \in \mathbf{G}$ , alors on a aussi la relation inverse  $\phi^{-1}$  définie par le couple  $(T^{-1}, \lambda^{-1}) \in \mathbf{G}$ . Nous allons utiliser aussi l'action de  $\mathbf{G}$  pour classifier  $\mathbf{SP}$ . Cette relation d'équivalence est algébrique. Elle est donc importante puisqu'elle permet de faire des calculs en utilisant des invariants algébriques.

La classification complète des portraits de phases pour  $\mathbf{SP}$  n'est pas encore connue, ni même celle de l'ensemble  $\mathbf{QS}$  des champs de vecteurs quadratiques réels dans le plan. Cette famille de systèmes dépend de douze paramètres,

mais l'action du groupe  $\mathbf{G}$  des transformations affines réelles et des homothéties du temps permettra de réduire la dépendance de la famille à cinq paramètres, ce qui est encore un grand nombre de paramètres. On s'intéressera à une sous-famille de  $\mathbf{QS}$ , dont l'action du groupe  $\mathbf{G}$  réduira la dépendance de la famille à seulement 3 paramètres.

## 2.2. SYSTÈMES DIFFÉRENTIELS QUADRATIQUES À FOYER FAIBLE

On sait que la famille des systèmes quadratiques possédant un foyer faible, c'est-à-dire un point singulier avec des valeurs propres  $\pm\beta i$  et qui n'est pas un centre, joue un rôle important dans le contexte du seizième problème d'Hilbert (voir l'introduction). Un tel système à foyer faible peut être ramené par des transformations affines et des homothéties sur le temps à la forme suivante (voir plus loin) :

$$\begin{aligned}\dot{x} &= p(x, y) = -y + p_2(x, y) + \dots + p_m(x, y) \\ \dot{y} &= q(x, y) = x + q_2(x, y) + \dots + q_m(x, y).\end{aligned}\tag{2.1}$$

Dans [23], Poincaré énonce le théorème suivant :

**Théorème 2.2. (1885)** *L'origine d'un système de la forme (2.1) est un centre si et seulement si il existe un voisinage  $U \subseteq \mathbb{R}^2$  contenant l'origine sur lequel (2.1) possède une intégrale première  $F$  non-constante qui est analytique.*

Une fonction  $F(x, y)$  sera intégrale première pour (2.1) sur  $\mathbb{R}^2$  si et seulement si  $\frac{dF}{dt} = 0$  pour toute solution  $\Gamma(t) = (x(t), y(t))$  et  $\forall t \in (a, b)$  où  $(a, b)$  est l'intervalle maximal de définition de  $\Gamma$ . Autrement dit,  $F(x, y)$  est constante sur les courbes de phase du système.

Une preuve de ce théorème peut être trouvée dans [24] ou dans [26]. Dans la preuve, Poincaré utilise des fonctions trigonométriques et transforme le système en coordonnées polaires. Près d'un siècle plus tard, Shi a observé qu'on pouvait algébriser une partie de la preuve en donnant le lemme suivant, tiré de [29].

**Lemme 2.1. (1981)** *Considérons le système polynomial*

$$\begin{aligned}\dot{x} &= p(x, y) = -y + p_2(x, y) + \dots + p_m(x, y) \\ \dot{y} &= q(x, y) = x + q_2(x, y) + \dots + q_m(x, y)\end{aligned}$$

où

$$p_i(x, y) = \sum_{j=0}^i a_{ij} x^{i-j} y^j, \quad q_i(x, y) = \sum_{j=0}^i b_{ij} x^{i-j} y^j \text{ avec } a_{ij}, b_{ij} \in \mathbb{R}.$$

Alors, il existe une série formelle  $F \in \mathbb{Q}[a_{20}, \dots, b_{0m}][[x, y]]$ ,

$$F = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + F_3(x, y) + F_4(x, y) + \dots,$$

et il existe des polynômes  $V_1, \dots, V_i, \dots \in \mathbb{Q}[a_{20}, \dots, b_{0m}]$  tel que

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial x}p + \frac{\partial F}{\partial y}q = \sum_{i=1}^{\infty} V_i(x^2 + y^2)^{i+1}.$$

La série se construit pas à pas en suivant la méthode de Poincaré. Poincaré démontre que la série ainsi construite est convergente dans le cas d'un centre. Donc, l'origine d'un système de la forme (2.1) est un centre si et seulement si les constantes  $V_i$  sont nulles  $\forall i \in \mathbb{N}$ . En effet, si l'origine est un centre, alors le théorème 2.1 implique qu'il existe une fonction  $F$  analytique tel que  $\frac{dF}{dt} = 0$  pour tout  $i$ , i.e.  $\frac{\partial F}{\partial x}p(x, y) + \frac{\partial F}{\partial y}q(x, y) = 0$ .  $F$  étant analytique, on peut écrire  $F(x, y) = \sum_{i+j=0}^{i+j=\infty} a_{ij}x^i y^j$ . En remplaçant dans l'équation précédente, on arrive à une suite de coefficients qui doivent tous être nuls. En comparant cette fonction  $F$  avec celle donnée par le lemme 2.1, il est clair qu'on aura nécessairement  $V_i = 0$  pour tout  $i$ . Réciproquement, si  $V_i = 0$  pour tout  $i$ , on a  $\frac{dF}{dt} = 0$  et Poincaré a démontré que  $F$  définit une fonction analytique au voisinage de  $(0, 0)$ , alors l'origine doit être un centre, par le théorème 2.2.

Les polynômes  $V_i$  sont appelées les *constantes de Poincaré-Lyapunov*. Seule la constante  $V_1$  est unique, mais Shi a démontré dans [30] que les autres constantes  $V_i$  sont uniques dans le sens suivant :

**Théorème 2.3. (1984)** Soit  $A$  l'anneau  $\mathbb{Q}[a_{20}, \dots, b_{0m}]$ . Étant donné une suite de constantes de Poincaré-Lyapunov  $V_1, V_2, \dots, V_i$ , soit  $J_{k-1}$  l'idéal de  $A$  généré par  $V_1, \dots, V_{k-1}$ . Si  $\{V'_1, V'_2, \dots, V'_i\}$  est une autre suite de constantes de Poincaré-Lyapunov, alors

$$V_k \equiv V'_k \pmod{(J_{k-1})}.$$

Selon le théorème de la base d'Hilbert, on sait que l'idéal  $I = \langle V_1, \dots, V_i, \dots \rangle$  a une base finie. Il suffit donc de connaître cette base pour les systèmes quadratiques **QS** afin d'obtenir des conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence d'un centre. Les travaux de Bautin dans [8] ont permis d'affirmer que l'idéal, pour les systèmes quadratiques, est déterminé par les trois premières constantes de Poincaré-Lyapunov, soit  $V_1, V_2, V_3$ . Ainsi, par le théorème de Poincaré, pour un système (2.1) quadratique, i.e. avec  $m = 2$ , l'origine est un centre si et seulement si  $V_1 = V_2 = V_3 = 0$ . On dit alors que l'origine d'un système quadratique est

- (1) un foyer faible d'ordre un si  $V_1 \neq 0$ ;

- (2) *un foyer faible d'ordre deux* si  $V_1 = 0$  et  $V_2 \neq 0$  ;
- (3) *un foyer faible d'ordre trois* si  $V_1 = V_2 = 0$  et  $V_3 \neq 0$  ;
- (4) *un centre* si  $V_1 = V_2 = V_3 = 0$ , ce qui entraîne  $V_i = 0 \forall i$ . Dans ce cas, on peut parler d'*ordre infini*.

Par perturbation, les foyers faibles génèrent des cycles limites dans leur voisinage. L'un des premiers résultats d'importance à ce sujet a été démontré en 1954 par Bautin [8]. Pour énoncer ce théorème, il est nécessaire de connaître la notion de cyclicité.

Considérons un système de la forme

$$\begin{aligned} \dot{x} &= a_0 + a_{10}x + a_{01}y + a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2 \\ \dot{y} &= b_0 + b_{10}x + b_{01}y + b_{20}x^2 + b_{11}xy + b_{02}y^2 \end{aligned} \quad \text{avec} \quad \begin{vmatrix} a_{10} & a_{01} \\ b_{10} & b_{01} \end{vmatrix} \neq 0 \quad (2.2)$$

et  $a_0, b_0, a_{ij}, b_{ij} \in \mathbb{R} \forall i, j \in \{0, 1, 2\}$ . Chaque suite de coefficients peut être représenté comme un point  $a = (a_0, a_{10}, \dots, b_{02})$  de l'espace euclidien  $\mathbb{R}^{12}$  de dimension 12. Soit  $(x_0, y_0)$  un point singulier d'un système de la forme (2.2). Par l'action d'une translation, on peut ramener ce point à l'origine. On peut donc considérer  $(a_0, b_0) = (0, 0)$  et  $(x_0, y_0) = (0, 0)$ .

Soit  $k \geq 0$ . On dit que le point d'équilibre  $(x_0, y_0) = (0, 0)$  d'un système  $a = (a_{10}, \dots, b_{02}) \in \mathbb{R}^{10}$  de (2.2) avec  $a_{10}b_{01} - a_{01}b_{10} > 0$  et  $a_{10} + b_{01} = 0$  a une *cyclicité d'ordre  $k$  par rapport à  $\mathbb{R}^{10}$*  s'il respecte les conditions suivantes :

- (1)  $\exists \epsilon_0 > 0$  et  $\exists \delta_0 > 0$  tel que dans un  $\epsilon_0$ -voisinage  $V_{\epsilon_0}$  du point  $a \in \mathbb{R}^{10}$  correspondant au système (2.2), tout point  $a'$  correspondant à un système de la forme (2.2) (avec  $a_0 = b_0 = 0$ ) possède au plus  $k$  cycles limites dans un  $\delta_0$ -voisinage du point d'équilibre  $(0, 0)$  ;
- (2)  $\forall \epsilon$  et  $\forall \delta$  tel que  $0 < \epsilon < \epsilon_0$  et  $0 < \delta < \delta_0$ , il existe un point  $\tilde{a}$  dans un  $\epsilon$ -voisinage  $V_\epsilon$  du point  $a \in \mathbb{R}^{10}$  tel que le système (2.2) correspondant possède exactement  $k$  cycles limites dans un  $\delta$ -voisinage du point  $(0, 0)$ .

On peut à présent citer le théorème de Bautin.

**Théorème 2.4.** *La cyclicité d'un point d'équilibre de type centre ou foyer dans un système quadratique est d'au plus d'ordre 3.*

Ainsi, si on a un système  $S \in \mathbf{SP}$ , on peut créer des cycles limites en perturbant des systèmes quadratiques avec des centres ou des foyers faibles. Les points d'équilibre de type foyer faible jouent un rôle particulier. Le théorème 2.5, tiré de [22], explicite ce rôle.

La norme  $C^k$ , pour  $f \in C^k(E)$  et pour  $E$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ , est définie comme étant

$$\|f\|_k = \sup_E |f(x)| + \sup_E \|Df(x)\| + \dots + \sup_E \|D^k f(x)\|$$

avec

$$\|D^k f(x)\| = \max \left| \frac{\partial^k f(x)}{\partial x_{j_1} \dots \partial x_{j_k}} \right|$$

où le maximum est pris sur  $j_1, \dots, j_k = 1, \dots, n$ .

Considérons un système analytique de la forme

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y + p(x, y) \\ \dot{y} &= x + q(x, y) \end{aligned} \tag{2.3}$$

et soit  $f$  la fonction  $(\dot{x}, \dot{y}) = (-y + p(x, y), x + q(x, y))$ . On a alors le théorème suivant.

**Théorème 2.5.** *Soit un système analytique de la forme (2.3). Si l'origine est un foyer faible d'ordre  $m$ , alors pour  $k \geq 2m + 1$ ,*

- (i) *il existe un  $\delta > 0$  et un  $\epsilon > 0$  tel que tout système  $\epsilon$ -voisins à (2.3) dans la norme  $C^k$  possède au plus  $m$  cycles limites dans  $N_\delta((0, 0))$  et*
- (ii) *pour tout  $\delta > 0$  et  $\epsilon > 0$ , il existe un système analytique qui est  $\epsilon$ -voisins à (2.3) dans la norme  $C^k$  possédant exactement  $m$  cycles limites dans  $N_\delta((0, 0))$ .*

Soit **QW3** la classe des systèmes quadratiques à foyer faible d'ordre 3. Dans les pages qui suivent, on s'intéresse à cette sous-famille de **QS**. L'action du groupe **G** permettra de réduire la dépendance du système à seulement trois paramètres. La classification des portraits de phase de cette famille a été faite dans [7].

### 2.3. FORME NORMALE DE LI POUR **QW3**

Déterminons à présent une forme normale pour les systèmes quadratiques à centre ou à foyer faible d'ordre 3. De façon générale, tout système de **QS** peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= a_0 + a_{10}x + a_{01}y + a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2 \\ \dot{y} &= b_0 + b_{10}x + b_{01}y + b_{20}x^2 + b_{11}xy + b_{02}y^2 \end{aligned} \tag{2.4}$$

avec

$$(a_0, a_{10}, a_{01}, a_{20}, a_{11}, a_{02}, b_0, b_{10}, b_{01}, b_{20}, b_{11}, b_{02}) \in \mathbb{R}^{12}$$

et

$$(a_{20}, a_{11}, a_{02}, b_{20}, b_{11}, b_{02}) \neq (0, 0, 0, 0, 0, 0).$$

**Proposition 2.1.** *Tout système  $S \in \mathbf{QS}$  possédant un centre ou un foyer au point  $(x_0, y_0)$  peut être ramené à la forme*

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \alpha x - \beta y + a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2 \\ \dot{y} &= \beta x + \alpha y + b_{20}x^2 + b_{11}xy + b_{02}y^2\end{aligned}\tag{2.5}$$

par l'action du groupe des transformations affines et des homothéties sur l'axe du temps et où  $\alpha$  et  $\beta$  sont respectivement les parties réelles et imaginaires des valeurs propres du linéarisé de (2.4) en  $(x_0, y_0)$ .

DÉMONSTRATION. Considérons un système de la forme (2.4) avec  $(x_0, y_0)$  un point singulier. Sans perte de généralité, on peut supposer  $a_0 = b_0 = 0$  car on peut toujours ramener la singularité  $(x_0, y_0)$  à l'origine en appliquant la translation définie par  $(x, y) \rightarrow (x - x_0, y - y_0)$ . On peut donc considérer un système de la forme suivante, avec une singularité à l'origine :

$$\begin{aligned}\dot{x} &= a_{10}x + a_{01}y + a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2 \\ \dot{y} &= b_{10}x + b_{01}y + b_{20}x^2 + b_{11}xy + b_{02}y^2\end{aligned}\tag{2.6}$$

où les coefficients  $a_{ij}$  et  $b_{ij}$  sont réels. Étant donné qu'on a une singularité de type centre ou foyer, les valeurs propres  $\mu_i$  du linéarisé sont complexes, i.e.  $\mu_i = \alpha \pm \beta i$ . Pour un système de la forme (2.6), les valeurs propres du linéarisé sont

$$\mu_i = \frac{a_{10} + b_{01} \pm \sqrt{(a_{10} - b_{01})^2 + 4a_{01}b_{10}}}{2}.$$

Étant donné que  $\mu_i \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ , on aura  $(a_{10} - b_{01})^2 + 4a_{01}b_{10} < 0$ . On a donc  $\alpha = \frac{a_{10} + b_{01}}{2}$  et  $\beta = \frac{\sqrt{-(a_{10} - b_{01})^2 - 4a_{01}b_{10}}}{2}$ . Afin d'obtenir la forme (2.5), il suffit d'appliquer la transformation linéaire de Bautin, tirée de [8] :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{b_{10}} & \frac{\alpha - a_{10}}{\beta b_{10}} \\ 0 & -\frac{1}{\beta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}\tag{2.7}$$

où l'inverse est

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b_{10} & a_{10} - \alpha \\ 0 & -\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.\tag{2.8}$$

En effet, on a

$$\begin{pmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b_{10} & a_{10} - \alpha \\ 0 & -\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix}\tag{2.9}$$



et donc

$$\begin{aligned}\dot{X} &= -b_{10}\dot{x} + (a_{10} - \alpha)\dot{y} \\ &= -\alpha b_{10}x + (a_{10}b_{01} - a_{01}b_{10} - \alpha b_{01})y + A_{20}X^2 + A_{11}XY + A_{02}Y^2\end{aligned}$$

en remplaçant  $\dot{x}$  et  $\dot{y}$  selon (2.6), et où  $A_{20}, A_{11}, A_{02}$  dépendent de  $a_{ij}$  et  $b_{ij}$ ,  $1 \leq i + j \leq 2, i, j \in \mathbb{N}$ . On peut maintenant remplacer  $x$  et  $y$  avec l'équation (2.7) et on obtient

$$\dot{X} = \alpha X + \frac{Y}{\beta} (a_{10}\alpha + b_{01}\alpha + a_{01}b_{10} - \alpha^2 - a_{10}b_{01}) + A_{20}X^2 + A_{11}XY + A_{02}Y^2.$$

En substituant  $\alpha$  par  $\frac{a_{10}+b_{01}}{2}$  et  $\beta$  par  $\frac{\sqrt{-(a_{10}-b_{01})^2-4a_{01}b_{10}}}{2}$ , on obtient

$$\begin{aligned}\dot{X} &= \alpha X + \frac{Y}{4\beta} ((a_{10} - b_{01})^2 + 4a_{01}b_{10}) + A_{20}X^2 + A_{11}XY + A_{02}Y^2 \\ &= \alpha X + \frac{Y}{\beta} (-\beta)^2 + A_{20}X^2 + A_{11}XY + A_{02}Y^2 \\ &= \alpha X - \beta Y + A_{20}X^2 + A_{11}XY + A_{02}Y^2.\end{aligned}$$

Pour  $\dot{Y}$ , on a

$$\begin{aligned}\dot{Y} &= -\beta\dot{y} \\ &= -\beta b_{10}x - \beta b_{01}y - \beta b_{20}x^2 - \beta b_{11}xy - \beta b_{02}y^2\end{aligned}$$

en remplaçant  $\dot{y}$  selon (2.6). On peut remplacer  $x$  et  $y$  avec les équations (2.7) et on a

$$\dot{Y} = \beta X + (a_{10} - \alpha)Y + b_{01}Y + B_{20}X^2 + B_{11}XY + B_{02}Y^2,$$

où  $B_{20}, B_{11}, B_{02}$  dépendent de  $a_{ij}$  et  $b_{ij}$ ,  $1 \leq i + j \leq 2, i, j \in \mathbb{N}$ . En substituant  $\alpha$  par  $\frac{a_{10}+b_{01}}{2}$ , on obtient directement

$$\dot{Y} = \beta X + \alpha Y + B_{20}X^2 + B_{11}XY + B_{02}Y^2.$$

On obtient finalement le résultat voulu.  $\square$

Pour les systèmes de la famille **QW3**, la singularité à l'origine est un foyer faible. Ainsi, par la proposition précédente, on ramène tous les systèmes de **QW3** à la forme (2.5), puis on impose  $\alpha = 0$  car on a un foyer faible à l'origine,

ce qui nous mène à

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -\beta y + a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2 \\ \dot{y} &= \beta x + b_{20}x^2 + b_{11}xy + b_{02}y^2\end{aligned}\tag{2.10}$$

avec  $\beta \neq 0$ . En faisant le changement de variable  $T = \beta t$ , on a que

$$\frac{\partial x}{\partial T} = \frac{\partial x}{\partial t} \cdot \frac{\partial t}{\partial T} = \frac{\dot{x}}{\beta}$$

et

$$\frac{\partial y}{\partial T} = \frac{\partial y}{\partial t} \cdot \frac{\partial t}{\partial T} = \frac{\dot{y}}{\beta}$$

ce qui nous permet de considérer  $\beta = 1$  dans le système (2.10).

**Proposition 2.2.** [7] *Tout système quadratique ayant un centre ou un foyer faible à l'origine peut être écrit sous la forme normale suivante, appelée forme normale de Li :*

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y + lx^2 + rxy + ny^2 \\ \dot{y} &= x + ax^2 + bxy\end{aligned}\tag{2.11}$$

*à l'aide d'un changement de variables linéaire et un changement d'échelle de la variable indépendante. De plus, la transformation vers cette forme dépend continûment des paramètres.*

DÉMONSTRATION. Considérons le système (2.10) avec  $\beta = 1$ , c'est-à-dire

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y + a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2 \\ \dot{y} &= x + b_{20}x^2 + b_{11}xy + b_{02}y^2\end{aligned}\tag{2.12}$$

et posons

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}\tag{2.13}$$

où  $X, Y \in \mathbb{R}$ . On cherche  $\theta$  tel que cette transformation ramène (2.10) à la forme (2.11). On a

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

et donc le système (2.12) devient

$$\begin{aligned}\dot{X} &= \dot{x} \cos\theta - \dot{y} \sin\theta \\ \dot{Y} &= \dot{x} \sin\theta + \dot{y} \cos\theta.\end{aligned}$$

En remplaçant  $\dot{x}$  et  $\dot{y}$  par les équations (2.13), on obtient un système de la forme

$$\begin{aligned}\dot{X} &= -Y + \tilde{a}_{20}X^2 + \tilde{a}_{11}XY + \tilde{a}_{02}Y^2 \\ \dot{Y} &= X + \tilde{b}_{20}X^2 + \tilde{b}_{11}XY + \tilde{b}_{02}Y^2\end{aligned}$$

où les coefficients  $\tilde{a}_{20}, \tilde{a}_{11}, \tilde{a}_{02}, \tilde{b}_{20}, \tilde{b}_{11}, \tilde{b}_{02}$  sont

$$\tilde{a}_{20} := a_{20}\cos^3\theta - (a_{11} + b_{20})\cos^2\theta\sin\theta + (a_{02} + b_{11})\cos\theta\sin^2\theta - b_{02}\sin^3\theta$$

$$\begin{aligned}\tilde{a}_{11} := & a_{11}\cos^3\theta + (2a_{20} - 2a_{02} - b_{11})\cos^2\theta\sin\theta + (2b_{02} - 2b_{20} - a_{11})\cos\theta\sin^2\theta \\ & + b_{11}\sin^3\theta\end{aligned}$$

$$\tilde{a}_{02} := a_{02}\cos^3\theta + (a_{11} - b_{02})\cos^2\theta\sin\theta + (a_{20} - b_{11})\cos\theta\sin^2\theta - b_{20}\sin^3\theta$$

$$\tilde{b}_{20} := b_{20}\cos^3\theta + (a_{20} - b_{11})\cos^2\theta\sin\theta + (b_{02} - a_{11})\cos\theta\sin^2\theta + b_{20}\sin^3\theta$$

$$\begin{aligned}\tilde{b}_{11} := & b_{11}\cos^3\theta + (a_{11} + 2b_{20} - 2b_{02})\cos^2\theta\sin\theta + (2a_{20} - 2a_{02} - b_{11})\cos\theta\sin^2\theta \\ & - a_{11}\sin^3\theta\end{aligned}$$

$$\tilde{b}_{02} := b_{02}\cos^3\theta + (a_{02} + b_{11})\cos^2\theta\sin\theta + (a_{11} + b_{20})\cos\theta\sin^2\theta + a_{20}\sin^3\theta.$$

Il ne reste qu'à démontrer qu'il existe  $\theta_0 \in \mathbb{R}$  tel que  $\tilde{b}_{02} = 0$  pour obtenir le résultat voulu. On analyse donc l'équation suivante :

$$\tilde{b}_{02} = b_{02}\cos^3\theta + (a_{02} + b_{11})\cos^2\theta\sin\theta + (a_{11} + b_{20})\cos\theta\sin^2\theta + a_{20}\sin^3\theta. \quad (2.14)$$

L'équation (2.14) ne peut pas être identiquement nulle. Supposons qu'on a  $b_{20} = a_{20} = a_{02} + b_{11} = a_{11} + b_{20} = 0$ . On obtient alors un système possédant un centre à l'origine plutôt qu'un foyer faible :

$$\dot{x} = -y(1 - a_{11}x - a_{02}y) \quad \dot{y} = x(1 - a_{11}x - a_{02}y).$$

Comme l'équation (2.14) n'est pas identiquement nulle, elle admet toujours une solution réelle dépendant continûment des paramètres. En effet, on a deux cas. Si  $a_{20} \neq 0$ , alors l'équation (2.14) a une solution réelle en  $\tan \theta$ . Cette solution tend vers l'infini si  $a_{20}$  tend vers 0. Si  $a_{20} = 0$ , alors l'équation admet la solution  $\theta_0 = \pi/2$ . Ceci démontre la proposition.  $\square$

**Proposition 2.3.** *Tout système quadratique à foyer faible d'ordre trois peut se ramener à la forme normale*

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y + lx^2 + 5axy + ny^2, \\ \dot{y} &= x + ax^2 + (3l + 5n)xy\end{aligned} \quad (2.15)$$

avec  $5a^3[2a^2 + n(l + 2n)][(l + n)^2(l + 2n) - a^2(5l + 6n)] \neq 0$  par l'action du groupe  $G$ .

DÉMONSTRATION. On sait que tout système quadratique ayant un foyer faible s'écrit comme

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y + lx^2 + rxy + ny^2 \\ \dot{y} &= x + ax^2 + bxy.\end{aligned}$$

Les calculs de Li dans [18] permettent de déterminer que les constantes de Lyapunov-Poincaré sont  $L_1 = V_1$ ,  $L_2 = V_2(\text{mod } V_1)$  et  $L_3 = V_3(\text{mod } V_1, V_2)$  avec

$$\begin{aligned}L_1 &= r(l + n) - a(b + 2l) \\ L_2 &= ra(5a - r)[(l + n)^2(n + b) - a^2(b + 2l + n)], \\ L_3 &= ra^2[2a^2 + n(l + 2n)][(l + n)^2(n + b) - a^2(b + 2l + n)],\end{aligned}$$

où les paramètres  $(a, l, n, b, r)$  proviennent de la forme (2.11). Le cas qui nous intéresse est celui où on a un foyer faible d'ordre trois à l'origine, c'est-à-dire lorsque  $L_1 = L_2 = 0$  et  $L_3 \neq 0$ . D'abord, comme  $L_3 \neq 0$ , on a les conditions suivantes à respecter :

- (1)  $r \neq 0$ ;
- (2)  $a \neq 0$ ;
- (3)  $2a^2 + n(l + 2n) \neq 0$
- (4)  $(l + n)^2(n + b) - a^2(b + 2l + n) \neq 0$ .

Puisqu'on doit avoir  $L_2 = 0$ , on obtient nécessairement  $5a - r = 0$ , c'est-à-dire  $r = 5a$ . Aussi, étant donné qu'on doit avoir  $L_1 = 0$ , il s'en suit que  $r(l + n) - a(b + 2l) = 0$ . En remplaçant dans cette équation  $r$  par  $5a$  et en divisant l'équation par  $a$ , on obtient simplement  $b = 3l + 5n$ . Ainsi, en remplaçant  $r$  et  $b$  par les expressions trouvées dans (2.11), on obtient le résultat voulu :

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y + lx^2 + 5axy + ny^2, \\ \dot{y} &= x + ax^2 + (3l + 5n)xy\end{aligned}$$

avec  $L_3 = 5a^3[2a^2 + n(l + 2n)][(l + n)^2(l + 2n) - a^2(5l + 6n)] \neq 0$ . □

**Remarque 2.1.** La forme normale (2.15) ne contient pas que des foyers faibles d'ordre trois.

En effet, la forme normale (2.11) a été déterminée en imposant  $L_1 = L_2 = 0$ . Alors, tout système de la forme (2.15) tel que les valeurs de  $a, l$  et  $n$  entraînent  $L_3 = 0$  possèdera plutôt un centre à l'origine. Entre autre, tout système de la forme (2.15) ayant  $a = 0$  sera un système à centre.

**Remarque 2.2.** La forme (2.15) dépend de 3 paramètres réels  $a, l, n$ , mais l'espace des paramètres peut être réduit à l'espace projectif réel à deux dimensions  $P_2(\mathbb{R})$ .

En effet, l'espace des paramètres pour des systèmes quadratiques de la forme (2.15) est  $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ . Nous ne considérons que les paramètres  $(a, l, n) \neq (0, 0, 0)$  car sinon, le système  $S$  est linéaire. Aussi, soit  $\delta \in \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$  et soit

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \delta \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} = \frac{1}{\delta} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Alors, un système de la forme (2.15) sera transformé :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \dot{\tilde{x}} \\ \dot{\tilde{y}} \end{pmatrix} &= \frac{1}{\delta} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\delta} (-y + lx^2 + 5axy + ny^2) \\ \frac{1}{\delta} (x + ax^2 + (3l + 5n)xy) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\delta} (-\delta\tilde{y} + \delta^2 l\tilde{x}^2 + 5\delta^2 a\tilde{x}\tilde{y} + \delta^2 n\tilde{y}^2) \\ \frac{1}{\delta} (\delta\tilde{x} + \delta^2 a\tilde{x}^2 + \delta^2 (3l + 5n)\tilde{x}\tilde{y}) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\tilde{y} + \delta l\tilde{x}^2 + 5\delta a\tilde{x}\tilde{y} + \delta n\tilde{y}^2 \\ \tilde{x} + \delta a\tilde{x}^2 + \delta(3l + 5n)\tilde{x}\tilde{y} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

On a  $(\tilde{a}, \tilde{l}, \tilde{n}) = (\delta a, \delta l, \delta n)$  et le nouveau système est difféomorphe à l'ancien. Ainsi, on peut considérer l'espace des paramètres comme l'espace projectif  $P_2(\mathbb{R})$  et considérons le paramètre  $\lambda = [a : l : n] \in P_2(\mathbb{R})$  où  $(a, l, n) \neq (0, 0, 0)$ .

En plus d'être réduit à l'espace  $P_2(\mathbb{R})$ , l'espace des paramètres peut être restreint par  $a \geq 0$  et  $n \geq 0$  à cause d'une symétrie présente via l'action du groupe  $G$ .

**Proposition 2.4.** *L'action du groupe  $G$  réduit l'espace des paramètres au quart de sphère formé des points  $[a : l : n] \in P_2(\mathbb{R})$  tels que  $a \geq 0, n \geq 0$  et  $a^2 + l^2 + n^2 = 1$ , et où les points opposés sur l'équateur sont identifiés.*

**DÉMONSTRATION.** Considérons les classes  $[a : l : n]$ . Si  $n \leq 0$ , on a  $[a : l : n] = [-a : -l : -n]$ . On peut donc supposer que  $n \geq 0$ . Si  $a \geq 0$ , on obtient directement le résultat voulu. Si  $a \leq 0$ , on peut se ramener à  $a \geq 0$  sans changer

le signe de  $n$  en appliquant la transformation  $(X, Y, T) = (-x, y, -t)$ . On a alors

$$\begin{aligned}\frac{dX}{dT} &= \frac{dX}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} \cdot \frac{dt}{dT} \\ &= -1 \cdot \dot{x} \cdot -1 \\ &= -Y + lX^2 - 5aXY + nY^2 \\ \frac{dY}{dT} &= \frac{dY}{dy} \cdot \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dT} \\ &= 1 \cdot \dot{y} \cdot -1 \\ &= X - aX^2 + (3l + 5n)XY.\end{aligned}$$

Alors, le système correspondant au paramètre  $\lambda = [a : l : n]$  est topologiquement équivalent au système correspondant à  $\lambda' = [-a : l : n]$ . L'espace des paramètres peut donc être considéré comme un quart de sphère constitué des points  $[a : l : n] \in P_2(\mathbb{R})$  où  $a \geq 0$  et  $n \geq 0$ .  $\square$

**Notation :** On note  $\mathbf{hD}$  le quart de sphère fermé

$$\{[a, l, n] \in P_2(\mathbb{R}) \setminus \{0\} \mid a \geq 0, n \geq 0, a^2 + l^2 + n^2 = 1\}$$

avec les points opposés de l'équateur identifiés.  $\mathbf{hD}$  peut être identifié par la projection verticale du quart de sphère avec un demi-disque fermé avec les points opposés du diamètre identifiés.

**Proposition 2.5.** *Un système quadratique ne peut contenir qu'un seul foyer faible d'ordre deux ou d'ordre trois.*

DÉMONSTRATION. Soit  $S \in \mathbf{QS}$  tel que  $S$  a un foyer faible en  $(x_0, y_0)$ . Sans perte de généralité, supposons  $(x_0, y_0) = (0, 0)$ . Alors, on peut écrire  $S$  sous la forme

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y + a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2 \\ \dot{y} &= x + b_{20}x^2 + b_{11}xy + b_{02}y^2.\end{aligned}$$

Supposons que  $S$  possède un autre foyer faible en  $(x_1, y_1)$ . L'action du groupe  $\mathbf{G}$  nous permet de ramener cette singularité au point  $(0, 1)$ . D'abord, on peut ramener la singularité sur l'axe  $y$  au point  $(0, Y)$  à l'aide d'une rotation. On cherche donc  $\theta$  tel que

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ Y \end{pmatrix}$$

avec  $Y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Si  $y_1 = 0$ , on pourra choisir  $\theta = \pi/2$  et on aura alors  $Y = -x_1$ . Si  $y_1 \neq 0$ , il suffira du choisir

$$\theta = \arctan \left( -\frac{x_1}{y_1} \right).$$

Finalement, pour ramener le point  $(0, Y)$  à  $(0, 1)$ , on n'a qu'à faire une homothétie sur l'axe  $y$  définir par  $y \mapsto \frac{y}{Y}$ .

Ainsi, sans perdre de généralité, on peut supposer que le second point singulier est en  $(0, 1)$ . Il s'en suit

$$\begin{aligned} -1 + a_{02} &= 0 \Rightarrow a_{02} = 1 \\ b_{02} &= 0. \end{aligned}$$

Le système a donc la forme suivante

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y + lx^2 + rxy + y^2 \\ \dot{y} &= x + ax^2 + bxy \end{aligned} \tag{2.16}$$

ce qui correspond à la forme normale de Li avec  $a_{20} = l$ ,  $a_{11} = r$ ,  $n = 1$ ,  $b_{20} = a$  et  $b_{11} = b$ .

Supposons que le point singulier  $(0, 0)$  est un foyer faible d'ordre 2 ou 3. Alors nécessairement, dans un cas comme dans l'autre, on aura  $L_1 = 0$ , i.e.

$$r(l+1) - a(b+2l) = 0.$$

Si  $(0, 0)$  est un foyer faible d'ordre 2, il faudra avoir  $L_2 \neq 0$ , i.e.

$$ra(5a-r)[(l+1)^2(b+1) - a^2(b+2l+1)] \neq 0$$

et si  $(0, 0)$  est plutôt un foyer faible d'ordre 3, il faudra avoir  $L_2 = 0$  et  $L_3 \neq 0$ , i.e.

$$\begin{aligned} ra(5a-r)[(l+1)^2(b+1) - a^2(b+2l+1)] &= 0, \\ ra^2[2a^2 + l + 2][(l+1)^2(b+1) - a^2(b+2l+1)] &\neq 0. \end{aligned}$$

Dans les deux cas, il faudra

$$\begin{aligned} r &\neq 0 \\ a &\neq 0 \\ (l+1)^2(b+1) - a^2(b+2l+1) &\neq 0 \\ \text{avec} \\ r(l+1) - a(b+2l) &= 0. \end{aligned}$$

Comme on a  $a \neq 0$ , on peut isoler  $b$  et on obtient

$$b = \frac{r(l+1)}{a} - 2l.$$

On remplace  $b$  par l'expression ci-haut dans (2.16) et on obtient la famille de systèmes

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y + lx^2 + rxy + y^2 \\ \dot{y} &= x + ax^2 + \left(\frac{r(l+1)}{a} - 2l\right)xy.\end{aligned}$$

Supposons maintenant que le second point singulier, placé en  $(0, 1)$ , est aussi un foyer faible d'ordre 2 ou 3. Translatons le point  $(0, 1)$  à l'origine afin de l'étudier. On applique la transformation  $(X, Y) = (x, y - 1)$  et on a

$$\begin{aligned}\dot{X} &= \dot{x} \\ &= -y + lx^2 + rxy + y^2 \\ &= -(Y + 1) + lX^2 + rX(Y + 1) + (Y + 1)^2 \\ &= rX + Y + lX^2 + rXY + Y^2\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\dot{Y} &= \dot{y} \\ &= x + ax^2 + \left(\frac{r(l+1)}{a} - 2l\right)xy \\ &= X + aX^2 + \left(\frac{r(l+1)}{a} - 2l\right)X(Y + 1) \\ &= \left(\frac{r(l+1)}{a} - 2l + 1\right)X + aX^2 + \left(\frac{r(l+1)}{a} - 2l\right)XY.\end{aligned}$$

Le linéarisé en  $(0, 0)$  est alors donné par la matrice

$$\begin{pmatrix} r & 1 \\ \left(\frac{r(l+1)}{a} - 2l + 1\right) & 0 \end{pmatrix}$$

dont les valeurs propres  $\mu_i$  sont déterminées par l'équation caractéristique

$$\mu^2 - r\mu - \left(\frac{r(l+1)}{a} - 2l + 1\right) = 0,$$

ce qui mène à

$$\mu_i = \frac{r \pm \sqrt{r^2 + 4\left(\frac{r(l+1)}{a} - 2l + 1\right)}}{2}.$$

Pour avoir un foyer faible, on doit avoir des valeurs propres purement imaginaires, i.e.

$$r = 0 \quad \text{et} \quad \frac{r(l+1)}{a} - 2l + 1 < 0$$

c'est-à-dire

$$r = 0 \quad \text{et} \quad l > \frac{1}{2}.$$

On obtient alors une contradiction car on devait avoir  $r \neq 0$  pour que la singularité initialement placé à l'origine soit un foyer faible d'ordre 2 ou 3. On peut donc conclure qu'un système quadratique ne peut pas contenir plus d'un foyer faible d'ordre 2 ou 3.  $\square$



**Théorème 2.6.** [19] *Si dans un système quadratique, on a un foyer faible d'ordre trois, alors autour de ce point singulier, il n'existe pas de cycles limites.*

#### 2.4. DIAGRAMME DE BIFURCATION POUR LA FAMILLE **QW3** À PARTIR DE LA FORME NORMALE DE LI

Le diagramme de bifurcation de **QW3** a été effectuée pour la première fois à partir de la forme normale de Li dans l'article *Quadratic Vector Fields with a Weak Focus of Third Order*, par Artès, J.C. et Llibre, J. en 1997 [4], sans toutefois utiliser de méthodes globales. Ce diagramme a été réalisé séparément sur des morceaux de l'espace des paramètres, sans le présenter globalement dans tout cet espace. Pour ce faire, les auteurs ont réduit l'étude des systèmes de la forme (2.15) à 3 cas :

- $n \neq 0$
- $n = 0$  et  $\alpha \neq 0$
- $n = 0 = \alpha$

**Cas 1 :**  $n \neq 0$  : En appliquant le changement de variables  $X = n^{-1}x$  et  $Y = n^{-1}y$ , on obtient un système de la forme

$$\begin{aligned}\dot{X} &= -Y + l'X^2 + 5\alpha'XY + Y^2 \\ \dot{Y} &= X + \alpha'X^2 + (3l' + 5)XY,\end{aligned}$$

où  $l' = n^{-1}l$  et  $\alpha' = n^{-1}\alpha$ . Ceci correspond finalement à la forme (2.15) avec  $n = 1$ . Un premier diagramme de bifurcation est alors produit à partir de la carte  $(\alpha, l)$ , avec  $n = 1$ .

**Cas 2 :**  $n = 0$  et  $\alpha \neq 0$  : On peut faire le changement de variable  $X = \alpha^{-1}x$  et  $Y = \alpha^{-1}y$ . Le système devient alors

$$\begin{aligned}\dot{X} &= -Y + l'X^2 + 5XY \\ \dot{Y} &= X + X^2 + 3l'XY,\end{aligned}$$

où  $l' = n^{-1}l$ . Les systèmes ne dépendent plus que d'un seul paramètre et un second diagramme de bifurcation est effectué.

**Cas 3 :**  $n = 0 = \alpha$  : On peut faire le changement de variable  $X = l^{-1}x$  et  $Y = l^{-1}y$  et le système devient :

$$\begin{aligned}\dot{X} &= -Y + X^2 \\ \dot{Y} &= X + 3XY.\end{aligned}$$

Ce système n'a plus de paramètre.

Le diagramme de bifurcations a été refait dans *The Geometry of Quadratic Differential Systems with a Weak Focus of Third Order*, par Llibre, J. et Schlotmiuk, D. en 2004 [7]. Dans ce travail, les auteurs ont utilisé le plan projectif comme espace des paramètres, dans lequel les trois morceaux ci-dessus figurent (grâce à l'action du groupe  $G$ ) sur  $hD$ , qu'on peut visualiser dans le demi-disque fermé avec les points opposés du diamètre identifiés. Ils ont utilisé des méthodes géométriques globales et des invariants globaux. Ce diagramme est présenté à la figure 2.1, avec agrandissement d'une région importante à la figure 2.2.

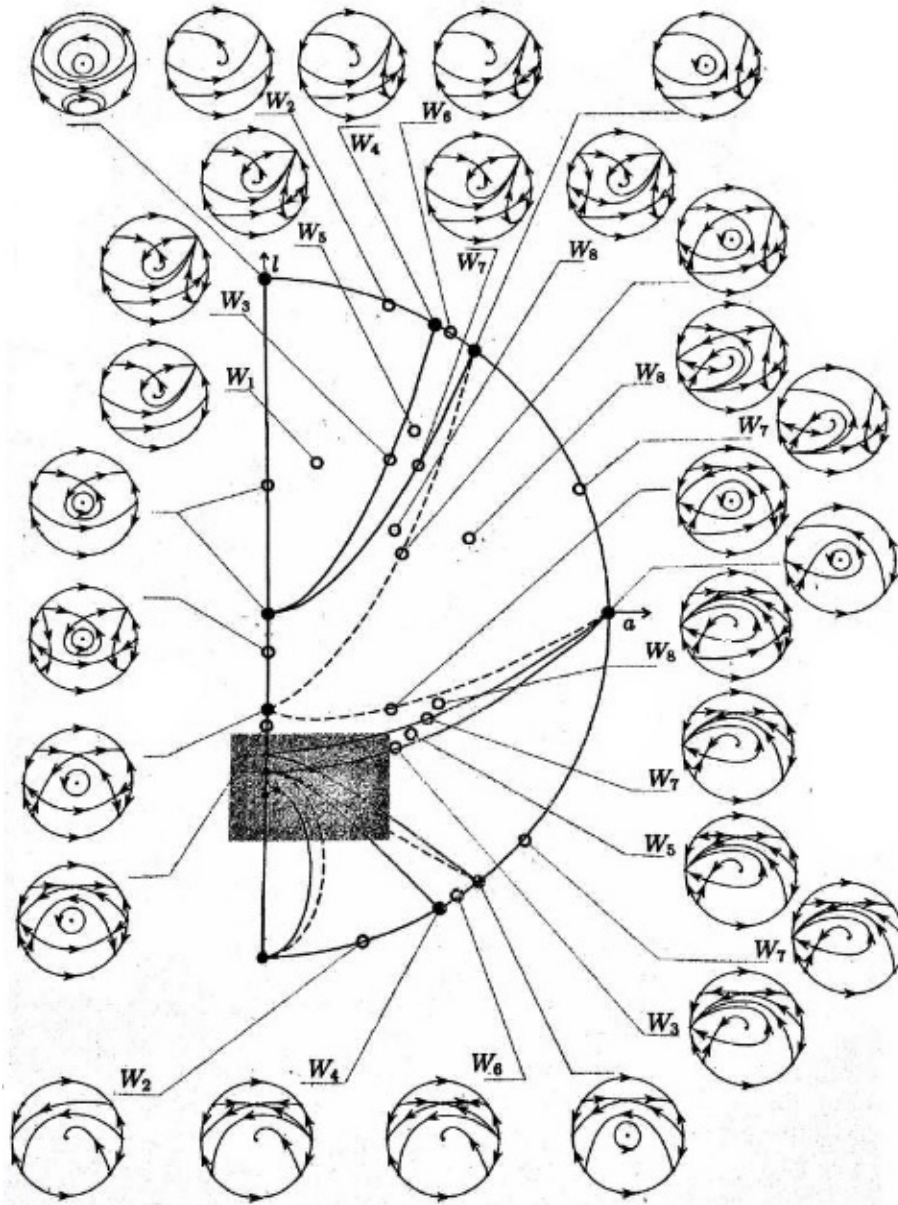


FIGURE 2.1. Diagramme de bifurcation pour la famille QW3.

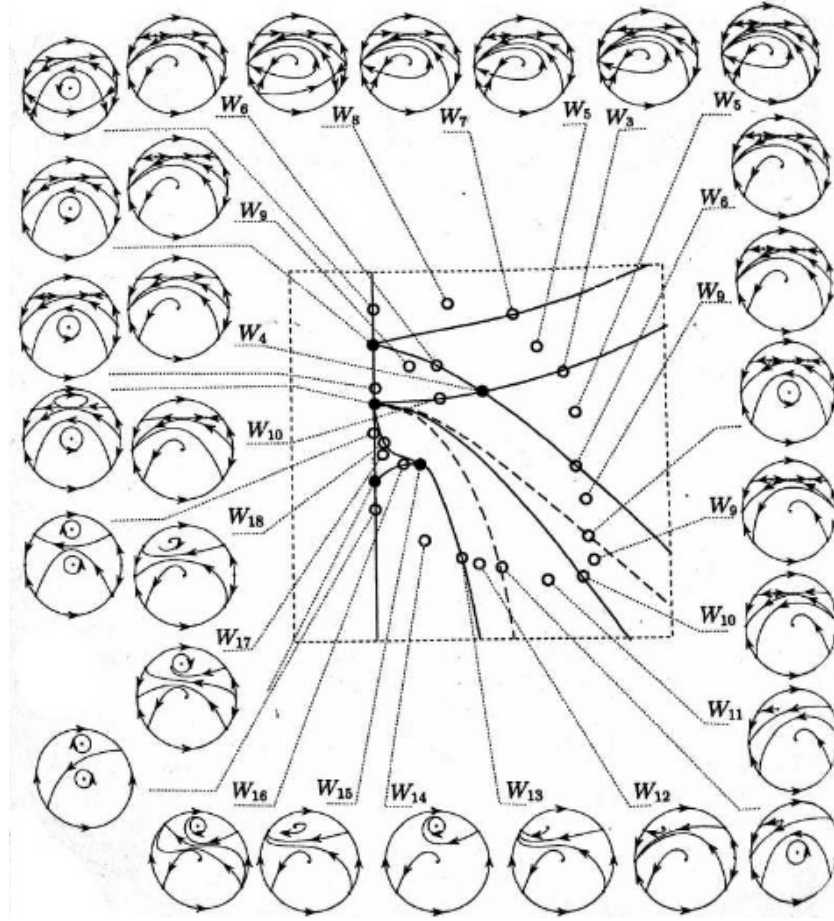


FIGURE 2.2. Diagramme de bifurcation pour la famille **QW3**.

Dans ce diagramme, les courbes de bifurcations apparaissent. Ces courbes, ainsi que leurs points d'intersection, sont identifiées à la figure 2.3. L'équation des courbes qui y apparaissent sont les suivantes :

$$\Delta : \quad 125a^4 + a^2(25l^2 + 170ln + 262n^2) + n(2l + 5n)^3 = 0 \quad (2.17)$$

$$\bar{\Omega} : \quad l(3l + 5n)^2 - 3a^2(5l + 8n) = 0 \quad (2.18)$$

$$\delta : \quad 3a^2 - l(l + 2n) = 0 \quad (2.19)$$

$$ln : \quad l + 2n = 0 \quad (2.20)$$

$$n : \quad n = 0. \quad (2.21)$$

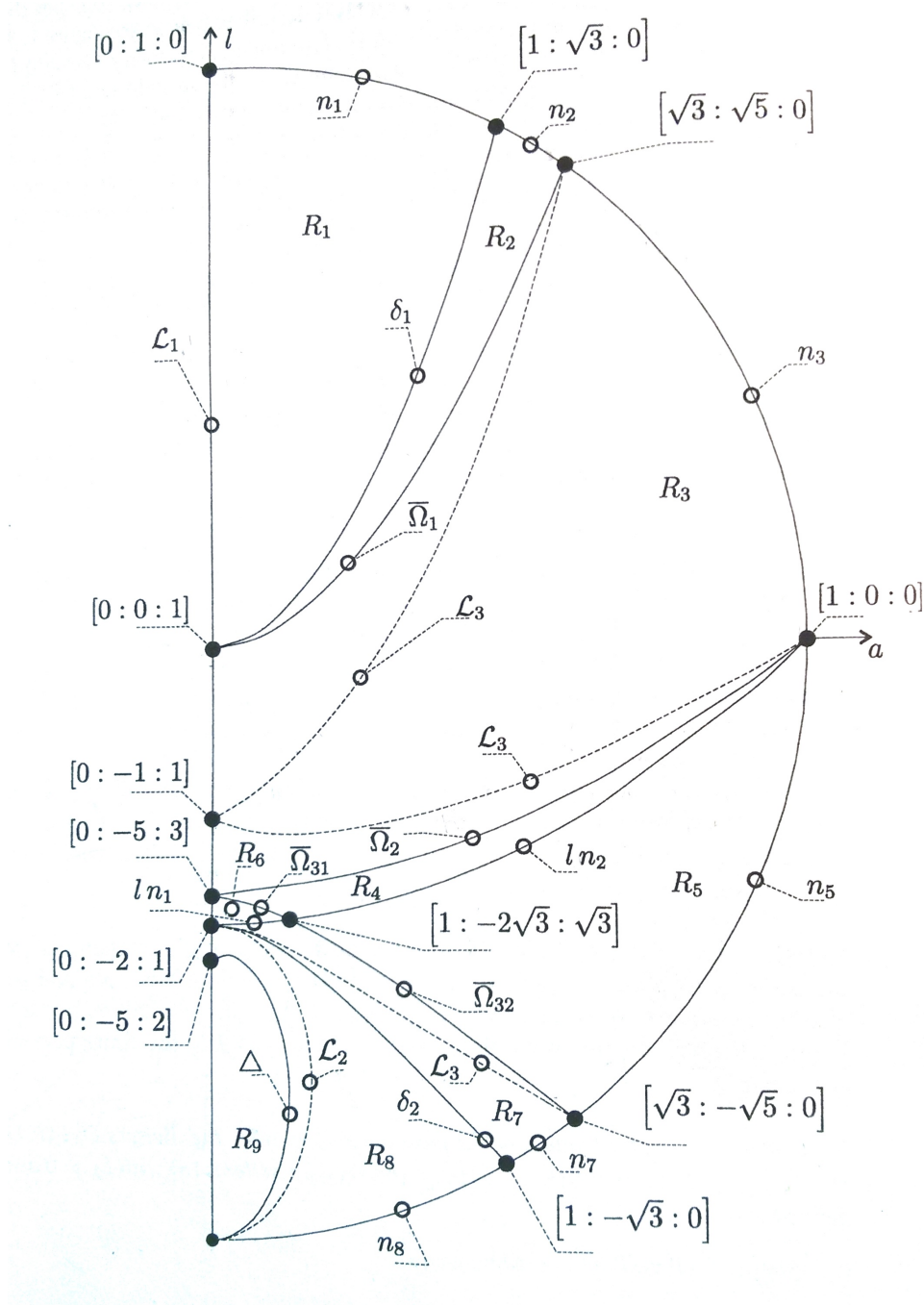


FIGURE 2.3. Courbes de bifurcation pour la famille **QW3**.

Il y a aussi une autre courbe de bifurcation, prouvée analytique dans [7], dont on ne possède pas l'équation et sur laquelle le portrait de phase est  $W_{18}$ .

Ces courbes de bifurcation séparent l'espace des paramètres  $\mathbf{hD}$  en 9 régions distinctes  $R_i$ , où  $1 \leq i \leq 9$ . Un point  $\lambda$  appartient à une courbe de bifurcation si pour tout voisinage  $V(\lambda)$ , il existe  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  tel que les systèmes  $S_1$

et  $S_2$  qui y sont associés ont des configurations en séparatrices qui ne sont pas équivalentes.

La signification de ces courbes de bifurcation se détectent facilement dans les figures 2.1 et 2.2.

Par exemple, étudions la courbe  $\delta$ , qui est une hyperbole. Elle possède deux branches, qu'on désigne par  $\delta_1$  et  $\delta_2$ . La branche  $\delta_1$  sépare les régions  $R_1$  et  $R_2$ . Tout système  $S$  dont les paramètres correspondent à un point  $\lambda$  de la région  $R_1$  n'admet que 2 singularités finies réelles : un foyer faible à l'origine et un point de selle. Sa configuration en séparatrices est représentée par  $W_1$  dans la figure 2.1. Les systèmes dont les paramètres  $[a : l : n]$  correspondent plutôt à un point sur  $\delta_1$  ont 3 singularités finies réelles. En plus du foyer faible à l'origine et du point de selle, un point selle-noeud apparaît. Dans  $R_2$ , le point selle-noeud disparaît de la configuration en séparatrices des systèmes et est remplacé par un point de selle et un noeud. Ces systèmes ont donc 4 singularités finies réelles.

La courbe  $\mathcal{L}$  correspond à l'équation

$$L_3 = 5a^3 [2a^2 + 2(l + 2n)] [(l + n)^2(l + 2n) - a^2(5l + 6n)] = 0. \quad (2.22)$$

Cette courbe est séparée en 3 branches (figure 2.3) : la droite  $\mathcal{L}_1$ , la parabole  $\mathcal{L}_2$  et la cubique  $\mathcal{L}_3$ . Leur équation est explicitée ci-dessous :

$$\mathcal{L}_1 : \quad a = 0 \quad (2.23)$$

$$\mathcal{L}_2 : \quad 2a^2 + 2(l + 2n) = 0 \quad (2.24)$$

$$\mathcal{L}_3 : \quad (l + n)^2(l + 2n) - a^2(5l + 6n) = 0. \quad (2.25)$$

Les courbes  $\mathcal{L}_1$ ,  $\mathcal{L}_2$  et  $\mathcal{L}_3$  apparaissent sur le diagramme et contiennent les systèmes à centre. La courbe  $\mathcal{L}_1$  est une frontière du diagramme, tout comme la courbe  $n = 0$ . La courbe  $\mathcal{L}_2$  sépare la région  $R_8$  en 2 morceaux. La courbe  $\mathcal{L}_3$  contient 3 branches. Les deux premières, qui relient le point  $[0 : -1 : 1]$  à respectivement  $[\sqrt{3} : \sqrt{5} : 0]$  et  $[1 : 0 : 0]$ , séparent  $R_3$  en 3 morceaux. La troisième branche, qui relie les points  $[0 : -2 : 1]$  et  $[\sqrt{3} : -\sqrt{5} : 0]$ , sépare  $R_7$  en 2 morceaux. Les 2 courbes  $\mathcal{L}_2$  et  $\mathcal{L}_3$  sont tracées en pointillé et séparent le diagramme en 5 régions.

On peut remarquer que seules les 3 configurations en séparatrices  $W_{14}$ ,  $W_{16}$ ,  $W_{17}$  possèdent un cycle limite.



## Chapitre 3

---

### ACTION LOCALE DU GROUPE $GL(2, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}^*$ SUR L'ESPACE DES PARAMÈTRES DE LA FORME NORMALE DE LI

Dans le chapitre précédent, l'action du groupe  $G$  a permis d'obtenir une forme normale pour les systèmes de **QW3**. De cette forme normale, un diagramme de bifurcation a été déterminé dans [7]. En observant le diagramme de bifurcation, on remarque que plusieurs portraits de phase s'y répètent. La question que l'on se pose est la suivante : le groupe  $G$  continue-t-il d'agir sur  $\mathbf{hD}$  ? Plus précisément, existe-t-il des transformations du groupe  $G$  telles que l'orbite d'un point  $S \in \mathbf{hD}$  contient un système  $\tilde{S} \neq S$  avec  $\tilde{S} \in \mathbf{hD}$  ? Dans ce chapitre, on répond à cette question.

On a vu qu'un système quadratique à foyer faible ne peut contenir qu'un seul foyer faible d'ordre trois. Comme la forme normale (2.15) a été déterminée en fixant le foyer faible d'ordre trois à l'origine, l'action du groupe des translations est éliminé. Ainsi, on ne s'intéresse qu'à l'action du groupe  $GL(2, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}^*$ , que l'on notera  $\bar{G}$ . Nous cherchons à la fois :

- (i) une transformation linéaire  $T \in GL(2, \mathbb{R})$  définie par une matrice réelle régulière

$$T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0.$$

envoyant un système  $S \in \mathbf{QW3}$  de la forme (2.15) sur un système  $\tilde{S}$  de la même forme ;

- (ii) une homothétie du temps  $\alpha \in \mathbb{R}^*$  tel que  $t = \alpha\tilde{t}$ ,  $t$  étant le temps pour le système  $S$ , et  $\tilde{t}$  le temps pour  $\tilde{S}$ .

**Proposition 3.1.** Soit  $T = \delta I$ ,  $\delta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , où  $I$  est la matrice identité et soit  $S$  un système de la forme (2.15) de paramètre  $(a, l, n) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ . Alors,

- (i) les paramètres de  $TS$  et  $S$  diffèrent par un facteur constant :  $TS$  est de paramètre  $(\delta^{-1}a, \delta^{-1}l, \delta^{-1}n)$ , ce qui donne le même point dans  $P_2(\mathbb{R})$  ;
- (ii) si  $(a, l, n) \in \mathbf{hD}$ , i.e.  $(a, l, n) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ ,  $a \geq 0, n \geq 0$  avec  $a^2 + l^2 + n^2 = 1$ , alors l'application  $T \rightarrow TS$  est l'identité sur  $\mathbf{hD}$ .

DÉMONSTRATION. On considère  $\tilde{S} = TS$ , i.e.  $\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} = \delta I \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ . Alors, nous avons

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \dot{\tilde{x}} \\ \dot{\tilde{y}} \end{pmatrix} &= \delta \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \delta(-y + lx^2 + 5axy + ny^2) \\ \delta(x + ax^2 + (3l + 5n)xy) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \delta(-\delta^{-1}\tilde{y} + l(\delta^{-1})^2\tilde{x}^2 + 5a(\delta^{-1})^2\tilde{x}\tilde{y} + n(\delta^{-1})^2\tilde{y}^2) \\ \delta(\delta^{-1}\tilde{x} + a(\delta^{-1})^2\tilde{x}^2 + (3l + 5n)(\delta^{-1})^2\tilde{x}\tilde{y}) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\tilde{y} + l\delta^{-1}\tilde{x}^2 + 5a\delta^{-1}\tilde{x}\tilde{y} + n\delta^{-1}\tilde{y}^2 \\ \tilde{x} + a\delta^{-1}\tilde{x}^2 + (3l + 5n)\delta^{-1}\tilde{x}\tilde{y} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$S$  est de paramètre  $[a : l : n]$  et suite à la transformation,  $TS$  est de paramètre  $[\delta^{-1}a : \delta^{-1}l : \delta^{-1}n]$ . Ces deux points sont identiques dans l'espace  $P_2(\mathbb{R})$  et l'application  $T \rightarrow TS$  est l'identité dans  $P_2(\mathbb{R})$ .

Si  $(a, l, n) \in \mathbf{hD}$ , alors le système  $TS$  donne le point

$$\frac{\delta^{-1}(a, l, n)}{\sqrt{\delta^{-2}(a^2 + l^2 + n^2)}} = \frac{|\delta|}{\delta}(a, l, n) = \pm 1(a, l, n)$$

et donc

- si  $\delta > 0$ , alors l'application  $S \rightarrow TS$  est l'identité sur  $\mathbf{hD}$ .
- si  $\delta < 0$ , alors  $\frac{|\delta|}{\delta} = -1$  et on a  $[-a : -l : -n] = [a : l : n] \in \mathbf{hD}$ .

□

### 3.1. ACTION DE $\bar{G}$ SUR $P_2(\mathbb{R})$

Soit  $\bar{g} = (T, \alpha) \in \bar{G}$  un couple formé d'une transformation linéaire de  $\mathbb{R}^2$  et d'un nombre  $\alpha \in \mathbb{R}^*$ . L'action de  $\bar{G}$  sur  $\mathbf{QW3}$  est définie comme

$$\begin{aligned} \bar{G} \times \mathbf{QW3} &\rightarrow \mathbf{QW3} \\ (\bar{g}, S) = ((T, \alpha), S) &\rightarrow S = \frac{1}{\alpha} \cdot T \cdot \tilde{S} \text{ et } t = \alpha \tilde{t}. \end{aligned}$$



**Théorème 3.1.** *Considérons des transformations  $\bar{g} = (T, \alpha) \in \bar{G}$  agissant sur des systèmes  $S$  tel que  $S$  et  $\tilde{S}$  soient de la forme (2.15). Alors, nécessairement,  $\alpha = \pm 1$  et il existe exactement quatre familles de couples  $(\bar{g}, S)$ .*

(i) *La transformation définie par  $\alpha = 1$  et  $T = a_{11} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  où  $a_{11} \neq 0$  envoie un système de la forme*

$$S = \begin{cases} \dot{x} &= -y + lx^2 + 5axy + ny^2 \\ \dot{y} &= x + ax^2 + (3l + 5n)xy \end{cases} \quad \text{où } (a, l, n) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$$

*sur un système de la forme*

$$\tilde{S} = \begin{cases} \dot{x} &= -y + a_{11}lx^2 + 5a_{11}axy + a_{11}ny^2 \\ \dot{y} &= x + a_{11}ax^2 + a_{11}(3l + 5n)xy. \end{cases}$$

(ii) *La transformation définie par  $\alpha = -1$  et  $T = -a_{11} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  où  $a_{11} \neq 0$  envoie un système de la forme*

$$S = \begin{cases} \dot{x} &= -y + lx^2 + 5axy + ny^2 \\ \dot{y} &= x + ax^2 + (3l + 5n)xy \end{cases} \quad \text{où } (a, l, n) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$$

*sur un système de la forme*

$$\tilde{S} = \begin{cases} \dot{x} &= -y - a_{11}lx^2 + 5a_{11}axy - a_{11}ny^2 \\ \dot{y} &= x + a_{11}ax^2 - a_{11}(3l + 5n)xy. \end{cases}$$

(iii) *La transformation définie par  $\alpha = 1$  et  $T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ -a_{12} & a_{11} \end{pmatrix}$  où  $a_{11}^2 + a_{12}^2 \neq 0$  envoie un système de la forme*

$$S = \begin{cases} \dot{x} &= -y - \frac{6(a_{11}a_{12}a + a_{11}^2n)}{3a_{11}^2 + a_{12}^2}x^2 + 5axy + ny^2 \\ \dot{y} &= x + ax^2 + (5n - \frac{18(a_{11}a_{12}a + a_{11}^2n)}{3a_{11}^2 + a_{12}^2})xy. \end{cases} \quad \text{où } (a, n) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$$

*sur un système de la forme*

$$\tilde{S} = \begin{cases} \dot{\tilde{x}} &= -\tilde{y} - \frac{6(4a_{11}^2a_{12}a + a_{11}^3n - a_{11}a_{12}^2n)}{3a_{11}^2 + a_{12}^2}\tilde{x}^2 + \frac{5(3a_{11}^3a - 5a_{11}a_{12}^2a - 3a_{11}^2a_{12}n + a_{12}^3n)}{3a_{11}^2 + a_{12}^2}\tilde{x}\tilde{y} \\ &+ \frac{15a_{11}^2a_{12}a - a_{12}^3a + 3a_{11}^3n - 5a_{11}a_{12}^2n}{3a_{11}^2 + a_{12}^2}\tilde{y}^2 \\ \dot{\tilde{y}} &= \tilde{x} + \frac{3a_{11}^3a - 5a_{11}a_{12}^2a - 3a_{11}^2a_{12}n + a_{12}^3n}{3a_{11}^2 + a_{12}^2}\tilde{x}^2 + \frac{3a_{11}^2a_{12}a - 5a_{11}^3a - 3a_{11}^3n - 7a_{11}a_{12}^2n}{3a_{11}^2 + a_{12}^2}\tilde{x}\tilde{y}. \end{cases}$$

(iv) La transformation définie par  $\alpha = -1$  et  $T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & -a_{11} \end{pmatrix}$  où  $a_{11}^2 + a_{12}^2 \neq 0$  envoie un système de la forme

$$S = \begin{cases} \dot{x} &= -y - \frac{6(a_{11}a_{12}a + a_{11}^2n)}{3a_{11}^2 + a_{12}^2}x^2 + 5axy + ny^2 \\ \dot{y} &= x + ax^2 + (5n - \frac{18(a_{11}a_{12}a + a_{11}^2n)}{3a_{11}^2 + a_{12}^2})xy. \end{cases} \quad \text{où } (a, n) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$$

sur un système de la forme

$$\tilde{S} = \begin{cases} \dot{\tilde{x}} &= -\tilde{y} - \frac{6(4a_{11}^2a_{12}a + a_{11}^3n - a_{11}a_{12}^2n)}{3a_{11}^2 + a_{12}^2}\tilde{x}^2 - \frac{5(3a_{11}^3a - 5a_{11}a_{12}^2a - 3a_{11}^2a_{12}n + a_{12}^3n)}{3a_{11}^2 + a_{12}^2}\tilde{x}\tilde{y} \\ &+ \frac{15a_{11}^2a_{12}a - a_{12}^3a + 3a_{11}^3n - 5a_{11}a_{12}^2n}{3a_{11}^2 + a_{12}^2}\tilde{y}^2 \\ \dot{\tilde{y}} &= \tilde{x} - \frac{3a_{11}^3a - 5a_{11}a_{12}^2a - 3a_{11}^2a_{12}n + a_{12}^3n}{3a_{11}^2 + a_{12}^2}\tilde{x}^2 + \frac{3a_{11}^2a_{12}a - 5a_{12}^3a - 3a_{11}^3n - 7a_{11}a_{12}^2n}{3a_{11}^2 + a_{12}^2}\tilde{x}\tilde{y}. \end{cases}$$

DÉMONSTRATION. Considérons la transformation  $(T, \alpha)$  où

$$T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \text{ et } t = \alpha \tilde{t}$$

où  $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$  et tel que

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix}.$$

Alors,

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{d\tilde{x}}{d\tilde{t}} \\ \frac{d\tilde{y}}{d\tilde{t}} \end{pmatrix} = \frac{1}{\alpha} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{d\tilde{x}}{d\tilde{t}} \\ \frac{d\tilde{y}}{d\tilde{t}} \end{pmatrix} = \frac{1}{\alpha} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\tilde{x}} \\ \dot{\tilde{y}} \end{pmatrix}.$$

On cherche une transformation où à la fois  $S$  et  $\tilde{S}$  sont de la forme (2.15). Les inconnues sont  $(\alpha, a, l, n, a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}) \in \mathbb{R}^8$  tel que  $\alpha \in \mathbb{R}^*$ ,  $(a, l, n) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$  et  $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ . Le système  $\tilde{S}$  dépendra des paramètres  $(\tilde{a}, \tilde{l}, \tilde{n}) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ .

Tout d'abord, nous avons

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \dot{\tilde{x}} \\ \dot{\tilde{y}} \end{pmatrix} &= \alpha \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} \\ &= \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -y + lx^2 + 5axy + ny^2 \\ x + ax^2 + (3l + 5n)xy \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$= \alpha \left( \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \right) \begin{pmatrix} a_{22}(-y + lx^2 + 5axy + ny^2) \\ -a_{12}(x + ax^2 + (3l + 5n)xy) \\ -a_{21}(-y + lx^2 + 5axy + ny^2) \\ +a_{11}(x + ax^2 + (3l + 5n)xy) \end{pmatrix}.$$

En remplaçant le côté droit par

$$x = a_{11}\tilde{x} + a_{12}\tilde{y} \quad (3.1)$$

$$y = a_{21}\tilde{x} + a_{22}\tilde{y}, \quad (3.2)$$

nous obtenons

$$\begin{pmatrix} \dot{\tilde{x}} \\ \dot{\tilde{y}} \end{pmatrix} = \frac{\alpha}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \begin{pmatrix} a_{22} [-(a_{21}\tilde{x} + a_{22}\tilde{y}) + l(a_{11}\tilde{x} + a_{12}\tilde{y})^2 \\ + 5a(a_{11}\tilde{x} + a_{12}\tilde{y})(a_{21}\tilde{x} + a_{22}\tilde{y}) + n(a_{21}\tilde{x} + a_{22}\tilde{y})^2] \\ -a_{12} [(a_{11}\tilde{x} + a_{12}\tilde{y}) + a(a_{11}\tilde{x} + a_{12}\tilde{y})^2 \\ + (3l + 5n)((a_{11}\tilde{x} + a_{12}\tilde{y})(a_{21}\tilde{x} + a_{22}\tilde{y}))] \\ -a_{21} [-(a_{21}\tilde{x} + a_{22}\tilde{y}) + l(a_{11}\tilde{x} + a_{12}\tilde{y})^2 \\ + 5a(a_{11}\tilde{x} + a_{12}\tilde{y})(a_{21}\tilde{x} + a_{22}\tilde{y}) + n(a_{21}\tilde{x} + a_{22}\tilde{y})^2] \\ +a_{11} [(a_{11}\tilde{x} + a_{12}\tilde{y}) + a(a_{11}\tilde{x} + a_{12}\tilde{y})^2 \\ + (3l + 5n)(a_{11}\tilde{x} + a_{12}\tilde{y})(a_{21}\tilde{x} + a_{22}\tilde{y}))] \end{pmatrix}.$$

On se retrouve alors avec deux équations :

$$\dot{\tilde{x}} = \frac{\alpha}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \begin{pmatrix} \tilde{x}(-a_{11}a_{12} - a_{21}a_{22}) + \tilde{y}(-a_{12}^2 - a_{22}^2) + \tilde{x}^2(a_{11}^2a_{22}l - a_{11}^2a_{12}a) \\ + 5a_{11}a_{21}a_{22}a - 3a_{11}a_{12}a_{21}l - 5a_{11}a_{12}a_{21}n + a_{21}^2a_{22}n) \\ + \tilde{x}\tilde{y}(-2a_{11}a_{12}^2a + 5a_{11}a_{22}^2a + 5a_{12}a_{21}a_{22}a - a_{11}a_{12}a_{22}l \\ - 3a_{12}^2a_{21}l - 5a_{11}a_{12}a_{22}n - 5a_{12}^2a_{21}n + 2a_{21}a_{22}^2n) \\ + \tilde{y}^2(-a_{12}^3a + 5a_{12}a_{22}^2a - 2a_{12}^2a_{22}l - 5a_{12}^2a_{22}n + a_{22}^3n) \end{pmatrix}$$

et

$$\dot{\tilde{y}} = \frac{\alpha}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \begin{pmatrix} \tilde{x}(a_{11}^2 + a_{21}^2) + \tilde{y}(a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22}) \\ + \tilde{x}^2(a_{11}^3a - 5a_{11}a_{21}^2a + 2a_{11}^2a_{21}l + 5a_{11}^2a_{21}n - a_{21}^3n) \\ + \tilde{x}\tilde{y}(2a_{11}^2a_{12}a - 5a_{11}a_{21}a_{22}a - 5a_{12}a_{21}^2a + 3a_{11}^2a_{22}l \\ + a_{11}a_{12}a_{21}l + 5a_{11}^2a_{22}a + 5a_{11}a_{12}a_{21}n - 2a_{21}^2a_{22}n) \\ + \tilde{y}^2(-a_{12}^2a_{21}l + a_{11}a_{12}^2a - 5a_{12}a_{21}a_{22}a + 3a_{11}a_{12}a_{22}l \\ + 5a_{11}a_{12}a_{22}n - a_{21}a_{22}^2n) \end{pmatrix}.$$

Les coefficients  $\tilde{a}_{ij}$ ,  $\tilde{b}_{ij}$  du système transformé dépendent des coefficients  $a_{11}$ ,  $a_{12}$ ,  $a_{21}$ ,  $a_{22}$  et des paramètres  $\alpha$ ,  $l$ ,  $n$ . Ils sont exprimés explicitement par les équations ci-dessous :

$$\begin{aligned}
\tilde{a}_{10} &= \frac{\alpha}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} (-a_{11}a_{12} - a_{21}a_{22}) \\
\tilde{a}_{01} &= \frac{\alpha}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} (-a_{12}^2 - a_{22}^2) \\
\tilde{a}_{20} &= \frac{\alpha}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} (a_{11}^2a_{22}l - a_{11}^2a_{12}a + 5a_{11}a_{21}a_{22}a - 3a_{11}a_{12}a_{21}l \\
&\quad - 5a_{11}a_{12}a_{21}n + a_{21}^2a_{22}n) \\
\tilde{a}_{11} &= \frac{\alpha}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} (-a_{11}a_{12}a_{22}l - 2a_{11}a_{12}^2a + 5a_{11}a_{22}^2a + 5a_{12}a_{21}a_{22}a - 3a_{12}^2a_{21}l \\
&\quad - 5a_{11}a_{12}a_{22}n - 5a_{12}^2a_{21}n + 2a_{21}a_{22}^2n) \\
\tilde{a}_{02} &= \frac{\alpha}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} (-2a_{12}^2a_{22}l - a_{12}^3a + 5a_{12}a_{22}^2a - 5a_{12}^2a_{22}n + a_{22}^3n) \\
\tilde{b}_{10} &= \frac{\alpha}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} (a_{11}^2 + a_{21}^2) \\
\tilde{b}_{01} &= \frac{\alpha}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} (a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22}) \\
\tilde{b}_{20} &= \frac{\alpha}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} (2a_{11}^2a_{21}l + a_{11}^3a - 5a_{11}a_{21}^2a + 5a_{11}^2a_{21}n - a_{21}^3n) \\
\tilde{b}_{11} &= \frac{\alpha}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} (a_{11}a_{12}a_{21}l + 2a_{11}^2a_{12}a - 5a_{11}a_{21}a_{22}a - 5a_{12}a_{21}^2a + 3a_{11}^2a_{22}l \\
&\quad + 5a_{11}^2a_{22}n + 5a_{11}a_{12}a_{21}n - 2a_{21}^2a_{22}n) \\
\tilde{b}_{02} &= \frac{\alpha}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} (-a_{12}^2a_{21}l + a_{11}a_{12}^2a - 5a_{12}a_{21}a_{22}a + 3a_{11}a_{12}a_{22}l \\
&\quad + 5a_{11}a_{12}a_{22}n - a_{21}a_{22}^2n).
\end{aligned}$$

Pour obtenir un système sous la forme (2.15), on doit avoir

$$\begin{aligned}
\tilde{a}_{10} &= 0 & \tilde{b}_{10} &:= 1 \\
\tilde{a}_{01} &= -1 & \tilde{b}_{01} &:= 0 \\
\tilde{a}_{20} &= \tilde{l} & \tilde{b}_{20} &:= \tilde{a} \\
\tilde{a}_{11} &= 5\tilde{a} & \tilde{b}_{11} &:= 3\tilde{l} + 5\tilde{n} \\
\tilde{a}_{02} &= \tilde{n} & \tilde{b}_{02} &:= 0
\end{aligned}$$

où  $\tilde{a}$ ,  $\tilde{l}$ ,  $\tilde{n}$  sont les nouveaux paramètres pour  $\tilde{S}$ . Ceci nous conduit à un système comportant dix équations dépendant des onze inconnues  $\alpha$ ,  $a$ ,  $l$ ,  $n$ ,  $\tilde{a}$ ,  $\tilde{l}$ ,  $\tilde{n}$ ,  $a_{11}$ ,  $a_{12}$ ,  $a_{21}$ ,  $a_{22}$ . Les équations sont désignées par  $A_{ij}$  et  $B_{ij}$ . Le côté gauche représente les coefficients  $\tilde{a}_{ij}$ ,  $\tilde{b}_{ij}$ . Ce système d'équations est le suivant :

$$\begin{aligned}
A_{10} &: \frac{\alpha}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} (-a_{11}a_{12} - a_{21}a_{22}) = 0 \\
A_{01} &: \frac{\alpha}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} (-a_{12}^2 - a_{22}^2) = -1 \\
A_{20} &: \frac{\alpha}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} (a_{11}^2a_{22}l - a_{11}^2a_{12}a + 5a_{11}a_{21}a_{22}a - 3a_{11}a_{12}a_{21}l \\
&\quad - 5a_{11}a_{12}a_{21}n + a_{21}^2a_{22}n) = \tilde{l} \\
A_{11} &: \frac{\alpha}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} (-a_{11}a_{12}a_{22}l - 2a_{11}a_{12}^2a + 5a_{11}a_{22}^2a + 5a_{12}a_{21}a_{22}a - 3a_{12}^2a_{21}l \\
&\quad - 5a_{11}a_{12}a_{22}n - 5a_{12}^2a_{21}n + 2a_{21}a_{22}^2n) = 5\tilde{a} \\
A_{02} &: \frac{\alpha}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} (-2a_{12}^2a_{22}l - a_{12}^3a + 5a_{12}a_{22}^2a - 5a_{12}^2a_{22}n + a_{22}^3n) = \tilde{n} \\
B_{10} &: \frac{\alpha}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} (a_{11}^2 + a_{21}^2) = 1 \\
B_{01} &: \frac{\alpha}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} (a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22}) = 0 \\
B_{20} &: \frac{\alpha}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} (2a_{11}^2a_{21}l + a_{11}^3a - 5a_{11}a_{21}^2a + 5a_{11}^2a_{21}n - a_{21}^3n) = \tilde{a} \\
B_{11} &: \frac{\alpha}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} (a_{11}a_{12}a_{21}l + 2a_{11}^2a_{12}a - 5a_{11}a_{21}a_{22}a - 5a_{12}a_{21}^2a + 3a_{11}^2a_{22}l \\
&\quad + 5a_{11}^2a_{22}n + 5a_{11}a_{12}a_{21}n - 2a_{21}^2a_{22}n) = 3\tilde{l} + 5\tilde{n} \\
B_{02} &: \frac{\alpha}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} (-a_{12}^2a_{21}l + a_{11}a_{12}^2a - 5a_{12}a_{21}a_{22}a + 3a_{11}a_{12}a_{22}l \\
&\quad + 5a_{11}a_{12}a_{22}n - a_{21}a_{22}^2n) = 0.
\end{aligned}$$

D'abord, on observe que l'équation  $A_{10}$  est équivalente à  $B_{01}$ , ce qui réduit le nombre d'équations à 9. On peut ensuite remarquer que  $\tilde{a}$ ,  $\tilde{l}$ ,  $\tilde{n}$  sont données explicitement en terme de  $\alpha$ ,  $a$ ,  $l$ ,  $n$ ,  $a_{11}$ ,  $a_{12}$ ,  $a_{21}$ ,  $a_{22}$  par les équations  $B_{20}$ ,  $A_{20}$  et  $A_{02}$ . On remplace alors leur valeur dans les équations  $A_{11}$  et  $B_{11}$  pour n'obtenir que 6 équations dépendant des 8 inconnues  $\alpha$ ,  $a$ ,  $l$ ,  $n$ ,  $a_{11}$ ,  $a_{12}$ ,  $a_{21}$ ,  $a_{22}$ . À la suite de ces simplifications, le système à résoudre est le suivant :

$$E1 : a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} = 0 \quad (A_{10})$$

$$E2 : a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} - \alpha a_{12}^2 - \alpha a_{22}^2 = 0 \quad (A_{01})$$

$$E3 : -a_{11}a_{12}a_{22}l - 2a_{11}a_{12}^2a + 5a_{11}a_{22}^2a + 5a_{12}a_{21}a_{22}a - 3a_{12}^2a_{21}l \\ - 5a_{11}a_{12}a_{22}n - 5a_{12}^2a_{21}n + 2a_{21}a_{22}^2n - 10a_{11}^2a_{21}l - 5a_{11}^3a + 25a_{11}a_{21}^2a \\ - 25a_{11}^2a_{21}n + 5a_{21}^3n = 0 \quad (A_{11})$$

$$E4 : \alpha a_{11}^2 + \alpha a_{21}^2 - a_{11}a_{22} + a_{12}a_{21} = 0 \quad (B_{10})$$

$$E5 : 2a_{11}a_{12}a_{21}l + a_{11}^2a_{12}a - 4a_{11}a_{21}a_{22}a - a_{12}a_{21}^2a + a_{11}^2a_{22}n + 4a_{11}a_{12}a_{21}n \\ - a_{21}^2a_{22}n + 2a_{12}^2a_{22}l + a_{12}^3a - 5a_{12}a_{22}^2a + 5a_{12}^2a_{22}n - a_{22}^3n = 0 \quad (B_{11})$$

$$E6 : -a_{12}^2a_{21}l + a_{11}a_{12}^2a - 5a_{12}a_{21}a_{22}a + 3a_{11}a_{12}a_{22}l + 5a_{11}a_{12}a_{22}n - a_{21}a_{22}^2n = 0. \quad (B_{02})$$

En additionnant E4 à E2, on a

$$E4' = E2 + E4 : \alpha (a_{11}^2 + a_{21}^2 - a_{12}^2 - a_{22}^2) = 0 \\ \Leftrightarrow a_{11}^2 + a_{21}^2 - a_{12}^2 - a_{22}^2 = 0,$$

puisque  $\alpha \neq 0$ . Ceci mène au système équivalent suivant :

$$E1 : a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} = 0$$

$$E2 : a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} - \alpha a_{12}^2 - \alpha a_{22}^2 = 0$$

$$E3 : -a_{11}a_{12}a_{22}l - 2a_{11}a_{12}^2a + 5a_{11}a_{22}^2a + 5a_{12}a_{21}a_{22}a - 3a_{12}^2a_{21}l - 5a_{11}a_{12}a_{22}n \\ - 5a_{12}^2a_{21}n + 2a_{21}a_{22}^2n - 10a_{11}^2a_{21}l - 5a_{11}^3a + 25a_{11}a_{21}^2a - 25a_{11}^2a_{21}n + 5a_{21}^3n = 0$$

$$E4' : a_{11}^2 + a_{21}^2 - a_{12}^2 - a_{22}^2 = 0$$

$$E5 : 2a_{11}a_{12}a_{21}l + a_{11}^2a_{12}a - 4a_{11}a_{21}a_{22}a - a_{12}a_{21}^2a + a_{11}^2a_{22}n + 4a_{11}a_{12}a_{21}n \\ - a_{21}^2a_{22}n + 2a_{12}^2a_{22}l + a_{12}^3a - 5a_{12}a_{22}^2a + 5a_{12}^2a_{22}n - a_{22}^3n = 0$$

$$E6 : -a_{12}^2a_{21}l + a_{11}a_{12}^2a - 5a_{12}a_{21}a_{22}a + 3a_{11}a_{12}a_{22}l + 5a_{11}a_{12}a_{22}n - a_{21}a_{22}^2n = 0.$$

On étudie deux cas possibles : soit  $a_{12} = 0$  ou  $a_{12} \neq 0$ .

**Premier cas :  $a_{12} = 0$** 

Si  $a_{12} = 0$ , alors par E1 on aura  $a_{21} \cdot a_{22} = 0$ . Nécessairement,  $a_{22} \neq 0$  car  $\det(T) \neq 0$  et donc  $a_{21} = 0$ . On a alors le système suivant :

$$E1 : 0 = 0$$

$$E2 : a_{11}a_{22} - \alpha a_{22}^2 = 0$$

$$E3 : 5a_{11}a_{22}^2a - 5a_{11}^3a = 0$$

$$E4' : a_{11}^2 - a_{22}^2 = 0$$

$$E5 : a_{11}^2a_{22}n - a_{22}^3n = 0$$

$$E6 : 0 = 0.$$

Par l'équation E2, on a  $a_{22}(a_{11} - \alpha a_{22}) = 0$ , et comme  $a_{22} \neq 0$ , on a

$$a_{11} = \alpha a_{22}.$$

En remplaçant ce résultat dans l'équation E4', on obtient

$$a_{22}^2(\alpha^2 - 1) = 0$$

et comme  $a_{22} \neq 0$ , on peut conclure que l'on a deux cas :  $\alpha = 1$  ou  $\alpha = -1$ .

- (i) Si  $\alpha = 1$ , nous aurons  $a_{22} = a_{11}$  et le système d'équations est complètement vérifié. On a donc

$$T = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{11} \end{pmatrix} = a_{11} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Les systèmes  $S$  et  $\tilde{S}$  seront alors définis par les paramètres

$$a \in \mathbb{R} \quad \tilde{a} = a_{11}a$$

$$l \in \mathbb{R} \quad \tilde{l} = a_{11}l$$

$$n \in \mathbb{R} \quad \tilde{n} = a_{11}n.$$

- (ii) Si  $\alpha = -1$ , nous aurons  $a_{22} = -a_{11}$ . Le système d'équations est alors complètement vérifié. On a donc

$$T = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & -a_{11} \end{pmatrix} = -a_{11} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Les systèmes  $S$  et  $\tilde{S}$  seront alors définis par les paramètres

$$a \in \mathbb{R} \quad \tilde{a} = a_{11}a$$

$$l \in \mathbb{R} \quad \tilde{l} = -a_{11}l$$

$$n \in \mathbb{R} \quad \tilde{n} = -a_{11}n.$$

**Second cas :**  $a_{12} \neq 0$

Si  $a_{12} \neq 0$ , alors par E1 on a

$$a_{11} = \frac{-a_{21}a_{22}}{a_{12}}. \quad (3.3)$$

Si  $a_{21} = 0$ , alors  $a_{11} = 0$  et  $T$  n'est pas inversible. On a donc  $a_{21} \neq 0$ .

En substituant (3.3) dans le système d'équations, on obtient

$$\tilde{E}2 : a_{21}a_{22}^2 + a_{12}^2a_{21} + \alpha a_{12}^3 + \alpha a_{12}a_{22}^2 = 0$$

$$\begin{aligned} \tilde{E}3 : a_{12}^3a_{21}a_{22}^2l + 7a_{12}^4a_{21}a_{22}a - 5a_{12}^2a_{21}a_{22}^3a - 3a_{12}^5a_{21}l + 7a_{12}^3a_{21}a_{22}^2n - 5a_{12}^5a_{21}n \\ - 10a_{12}a_{21}^3a_{22}^2l + 5a_{21}^3a_{22}^3a - 25a_{12}^2a_{21}^3a_{22}a - 25a_{12}a_{21}^3a_{22}^2n + 5a_{12}^3a_{21}^3n = 0 \end{aligned}$$

$$\tilde{E}4' : a_{21}^2a_{22}^2 + a_{12}^2a_{21}^2 - a_{12}^4 - a_{12}^2a_{22}^2 = 0$$

$$\begin{aligned} \tilde{E}5 : -2a_{12}^2a_{21}^2a_{22}l + 5a_{12}a_{21}^2a_{22}^2a - a_{12}^3a_{21}^2a + a_{21}^2a_{22}^3n - 5a_{12}^2a_{21}^2a_{22}n \\ + 2a_{12}^4a_{22}l + a_{12}^5a - 5a_{12}^3a_{22}^2a + 5a_{12}^4a_{22}n - a_{12}^2a_{22}^3n = 0 \end{aligned}$$

$$\tilde{E}6 : a_{12}^2a_{21}l + 6a_{12}a_{21}a_{22}a + 3a_{21}a_{22}^2l + 6a_{21}a_{22}^2n = 0.$$

Nous avons maintenant 5 équations et 7 inconnues  $(\alpha, a, l, n, a_{12}, a_{21}, a_{22}) \in \mathbb{R}^7$  tel que  $\alpha \neq 0$ ,  $(a, l, n) \neq (0, 0, 0)$ ,  $a_{21} \neq 0$  et  $a_{12} \neq 0$ . L'équation  $\tilde{E}2$  se factorise et on obtient

$$(a_{12}^2 + a_{22}^2)(\alpha a_{12} + a_{21}) = 0.$$

Étant donné que  $a_{12} \neq 0$ , alors  $a_{12}^2 + a_{22}^2 \neq 0$  et donc nécessairement

$$a_{21} = -\alpha a_{12}.$$

En substituant dans  $\tilde{E}4'$ , on obtient une expression qui se factorise ainsi :

$$a_{12}^2(a_{12}^2 + a_{22}^2)(\alpha^2 - 1) = 0.$$

Comme  $a_{12} \neq 0$ , on obtient encore une fois deux cas :  $\alpha = 1$  ou  $\alpha = -1$ .

(i) Supposons  $\alpha = 1$ . Alors, on a  $a_{11} = a_{22}$  et  $a_{21} = -a_{12}$ , i.e.

$$T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ -a_{12} & a_{11} \end{pmatrix}.$$

En remplaçant  $a_{21}$  par  $-a_{12}$  dans notre système d'équations, nous nous retrouvons avec 4 équations ( $\tilde{E}3, \tilde{E}4', \tilde{E}5, \tilde{E}6$ ) et 5 inconnues  $(a, l, n, a_{11}, a_{12})$ , tel que  $(a, l, n) \neq (0, 0, 0)$  et  $a_{12} \neq 0$ . Les équations  $\tilde{E}4'$  et  $\tilde{E}5$  sont de la



forme  $0 = 0$  et les deux autres équations du système sont équivalentes à

$$6a_{11}a_{12}a + a_{12}^2l + 3a_{11}^2l + 6a_{11}^2n = 0.$$

En isolant  $l$ , on obtient

$$l = \frac{-6a_{11}(a_{12}a + a_{11}n)}{3a_{11}^2 + a_{12}^2}. \quad (3.4)$$

En remplaçant dans les équations  $B_{20}$ ,  $A_{20}$  et  $A_{02}$ , on trouve explicitement les expressions pour  $\tilde{a}$ ,  $\tilde{l}$ ,  $\tilde{n}$  :

$$\begin{aligned} \tilde{a} &= \frac{3a_{11}^3a - 5a_{11}a_{12}^2a - 3a_{11}^2a_{12}n + a_{12}^3n}{3a_{11}^2 + a_{12}^2} \\ \tilde{l} &= -\frac{6(4a_{11}^2a_{12}a + a_{11}^3n - a_{11}a_{12}^2n)}{3a_{11}^2 + a_{12}^2} \\ \tilde{n} &= \frac{15a_{11}^2a_{12}a - a_{12}^3a + 3a_{11}^3n - 5a_{11}a_{12}^2n}{3a_{11}^2 + a_{12}^2}. \end{aligned}$$

(ii) Supposons  $\alpha = -1$ . Alors, on a  $a_{11} = -a_{22}$  et  $a_{21} = a_{12}$ , i.e.

$$T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & -a_{11} \end{pmatrix}.$$

En remplaçant  $a_{21}$  par  $a_{12}$  dans notre système d'équations, on se retrouve avec un système d'équations équivalent à celui étudié au cas précédent avec

$$l = \frac{-6a_{11}(a_{12}a + a_{11}n)}{3a_{11}^2 + a_{12}^2}.$$

En remplaçant dans les équations  $B_{20}$ ,  $A_{20}$  et  $A_{02}$ , on trouve explicitement les expressions pour  $\tilde{a}$ ,  $\tilde{l}$ ,  $\tilde{n}$  :

$$\begin{aligned} \tilde{a} &= \frac{-3a_{11}^3a + 5a_{11}a_{12}^2a + 3a_{11}^2a_{12}n - a_{12}^3n}{3a_{11}^2 + a_{12}^2} \\ \tilde{l} &= -\frac{6(4a_{11}^2a_{12}a + a_{11}^3n - a_{11}a_{12}^2n)}{3a_{11}^2 + a_{12}^2} \\ \tilde{n} &= \frac{15a_{11}^2a_{12}a - a_{12}^3a + 3a_{11}^3n - 5a_{11}a_{12}^2n}{3a_{11}^2 + a_{12}^2}. \end{aligned}$$

Ceci démontre le théorème. □

**Corollaire 3.1.** *Considérons l'espace des paramètre  $P_2(\mathbb{R})$ . Alors, il existe exactement deux familles de transformations non triviales  $(\bar{g}, S) = ((T, \alpha), S) \in \bar{G}$  tel que  $S$  et  $\tilde{S}$  soit de la forme (2.15) :*

(i) *La transformation  $\bar{g}$  définie par  $\alpha = -1$  et  $T = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  qui envoie un système de la forme*

$$S = \begin{cases} \dot{x} &= -y + lx^2 + 5axy + ny^2 \\ \dot{y} &= x + ax^2 + (3l + 5n)xy \end{cases} \quad \text{où } (a, l, n) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$$

*sur un système de la forme*

$$\tilde{S} = \begin{cases} \dot{x} &= -y + lx^2 - 5axy + ny^2 \\ \dot{y} &= x - ax^2 + (3l + 5n)xy. \end{cases}$$

*Cette famille est la symétrie  $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{t}) = (-x, y, -t)$  dans  $P_2(\mathbb{R})$ .*

(ii) *La transformation définie par  $\alpha = 1$  et  $T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ -a_{12} & a_{11} \end{pmatrix}$  où  $a_{11}^2 + a_{12}^2 \neq 0$ , qui envoie un système de la forme*

$$S = \begin{cases} \dot{x} &= -y - \frac{6(a_{11}a_{12}a + a_{11}^3n)}{3a_{11}^2 + a_{12}^2}x^2 + 5axy + ny^2 \\ \dot{y} &= x + ax^2 + (5n - \frac{18(a_{11}a_{12}a + a_{11}^3n)}{3a_{11}^2 + a_{12}^2})xy. \end{cases} \quad \text{où } (a, n) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$$

*sur un système de la forme*

$$\tilde{S} = \begin{cases} \dot{\tilde{x}} &= -\tilde{y} - \frac{6(4a_{11}^2a_{12}a + a_{11}^3n - a_{11}a_{12}^2n)}{3a_{11}^2 + a_{12}^2}\tilde{x}^2 + \frac{5(3a_{11}^3a - 5a_{11}a_{12}^2a - 3a_{11}^2a_{12}n + a_{12}^3n)}{3a_{11}^2 + a_{12}^2}\tilde{x}\tilde{y} \\ &+ \frac{15a_{11}^2a_{12}a - a_{12}^3a + 3a_{11}^3n - 5a_{11}a_{12}^2n}{3a_{11}^2 + a_{12}^2}\tilde{y}^2 \\ \dot{\tilde{y}} &= \tilde{x} + \frac{3a_{11}^3a - 5a_{11}a_{12}^2a - 3a_{11}^2a_{12}n + a_{12}^3n}{3a_{11}^2 + a_{12}^2}\tilde{x}^2 + \frac{3a_{11}^2a_{12}a - 5a_{12}^3a - 3a_{11}^3n - 7a_{11}a_{12}^2n}{3a_{11}^2 + a_{12}^2}\tilde{x}\tilde{y}. \end{cases}$$

**DÉMONSTRATION.** Considérons la famille (i) du théorème 3.1. Cette famille envoie un paramètre  $\lambda = [a : l : n] \in P_2(\mathbb{R})$  sur un paramètre  $\tilde{\lambda} = [\tilde{a} : \tilde{l} : \tilde{n}] = [a_{11}a : a_{11}l : a_{11}n] = [a : l : n] \in P_2(\mathbb{R})$ . Cette transformation est triviale puisqu'elle est l'identité dans  $P_2(\mathbb{R})$  et dans  $\mathbf{hD}$ .

La famille (ii) du théorème 3.1 envoie un paramètre  $\lambda = [a : l : n] \in P_2(\mathbb{R})$  sur un paramètre  $\tilde{\lambda} = [\tilde{a} : \tilde{l} : \tilde{n}] = [a_{11}a : -a_{11}l : -a_{11}n] = [a : -l : -n] = [-a : l : n] \in P_2(\mathbb{R})$ . Cette famille est la symétrie  $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{t}) = (-x, y, -t)$ .

Considérons la famille (iii) du théorème 3.1. Cette famille envoie un paramètre  $\lambda = [a : -\frac{6(a_{11}a_{12}a + a_{11}^3n)}{3a_{11}^2 + a_{12}^2} : n] \in P_2(\mathbb{R})$  sur un paramètre  $\tilde{\lambda} = [\tilde{a} : \tilde{l} : \tilde{n}] = [\frac{3a_{11}^3a - 5a_{11}a_{12}^2a - 3a_{11}^2a_{12}n + a_{12}^3n}{3a_{11}^2 + a_{12}^2} : -\frac{6(4a_{11}^2a_{12}a + a_{11}^3n - a_{11}a_{12}^2n)}{3a_{11}^2 + a_{12}^2} : \frac{15a_{11}^2a_{12}a - a_{12}^3a + 3a_{11}^3n - 5a_{11}a_{12}^2n}{3a_{11}^2 + a_{12}^2}] \in P_2(\mathbb{R})$ . Ceci est une nouvelle transformation qui doit être étudiée plus en détail.

Soit la famille (iv) du théorème 3.1. Celle-ci s'applique aux paramètres  $\lambda = \left[ a : -\frac{6(a_{11}a_{12}a + a_{11}^2n)}{3a_{11}^2 + a_{12}^2} : n \right] \in P_2(\mathbb{R})$  et les transforme sur les paramètres  $\tilde{\lambda} = \left[ -\frac{3a_{11}^3a - 5a_{11}a_{12}^2a - 3a_{11}^2a_{12}n + a_{12}^3n}{3a_{11}^2 + a_{12}^2} : -\frac{6(4a_{11}^2a_{12}a + a_{11}^3n - a_{11}a_{12}^2n)}{3a_{11}^2 + a_{12}^2} : \frac{15a_{11}^2a_{12}a - a_{12}^3a + 3a_{11}^3n - 5a_{11}a_{12}^2n}{3a_{11}^2 + a_{12}^2} \right] \in P_2(\mathbb{R})$ . Cette transformation est la composition de la transformation de la famille (ii) et de la famille (iii).

□

La famille de transformations (i) trouvée dans le corollaire 3.1 représente une symétrie déjà connue dans  $P_2(\mathbb{R})$  dans [7]. Nous allons donc étudier la famille de transformations (ii), qui dépend des 2 paramètres  $a_{11}$  et  $a_{12}$ . En travaillant dans l'espace des paramètres  $P_2(\mathbb{R})$ , on montre que la dépendance se réduit à un seul paramètre.

**Remarque 3.1.** Considérons la famille (ii) du corollaire 3.1.

(i) Si  $a_{12} = 0$ , la matrice  $T = a_{11}I$  et son action sur l'espace des paramètres  $P_2(\mathbb{R})$  est l'identité.

(ii) Si  $a_{12} \neq 0$ , alors on a

$$T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ -a_{12} & a_{11} \end{pmatrix} = a_{12}I \begin{pmatrix} \frac{a_{11}}{a_{12}} & 1 \\ -1 & \frac{a_{11}}{a_{12}} \end{pmatrix} \quad a_{11}^2 + a_{12}^2 \neq 0.$$

Par la proposition 3.1, on peut simplement considérer la matrice suivante :

$$T' = \begin{pmatrix} \frac{a_{11}}{a_{12}} & 1 \\ -1 & \frac{a_{11}}{a_{12}} \end{pmatrix}.$$

En posant  $\gamma = \frac{a_{11}}{a_{12}}$ , on obtient directement la matrice  $\begin{pmatrix} \gamma & 1 \\ -1 & \gamma \end{pmatrix}$ .

Considérons maintenant la famille de systèmes  $S$  du théorème 3.1. Dans  $P_2(\mathbb{R})$ , ces systèmes correspondent aux points

$$\lambda = [a : l : n] = \left[ a : \frac{-6a_{11}(a_{12}a + a_{11}n)}{3a_{11}^2 + a_{12}^2} : n \right].$$

On peut diviser le numérateur et le dénominateur du paramètre  $l$  par  $a_{12}^2$  :

$$l = \frac{-6a_{11}(a_{12}a + a_{11}n)}{3a_{11}^2 + a_{12}^2} = \frac{\frac{-6a_{11}(a_{12}a + a_{11}n)}{a_{12}^2}}{\frac{3a_{11}^2 + a_{12}^2}{a_{12}^2}} = \frac{-6\gamma(a + \gamma n)}{3\gamma^2 + 1}.$$

Finalement, dans  $P_2(\mathbb{R})$ , les systèmes  $\tilde{S}$  correspondent aux points

$$\tilde{\lambda} = \left[ \frac{3a_{11}^3a - 5a_{11}a_{12}^2a - 3a_{11}^2a_{12}n + a_{12}^3n}{3a_{11}^2 + a_{12}^2} : -\frac{6(4a_{11}^2a_{12}a + a_{11}^3n - a_{11}a_{12}^2n)}{3a_{11}^2 + a_{12}^2} : \frac{15a_{11}^2a_{12}a - a_{12}^3a + 3a_{11}^3n - 5a_{11}a_{12}^2n}{3a_{11}^2 + a_{12}^2} \right].$$

Comme  $a_{12} \neq 0$ , on peut multiplier  $\lambda$  par  $\frac{3a_{11}^2 + a_{12}^2}{a_{12}^3}$ , et on obtient :

$$\begin{aligned}\tilde{\lambda} &= \left[ \frac{3a_{11}^3 a - 5a_{11} a_{12}^2 a - 3a_{11}^2 a_{12} n + a_{12}^3 n}{a_{12}^3} : -\frac{6(4a_{11}^2 a_{12} a + a_{11}^3 n - a_{11} a_{12}^2 n)}{a_{12}^3} : \frac{15a_{11}^2 a_{12} a - a_{12}^3 a + 3a_{11}^3 n - 5a_{11} a_{12}^2 n}{a_{12}^3} \right] \\ &= [3\gamma^3 a - 5\gamma a - 3\gamma^2 n + n : -6(4\gamma^2 a + \gamma^3 n - \gamma n) : 15\gamma^2 a - a + 3\gamma^3 n - 5\gamma n].\end{aligned}$$

À l'aide de cette observation, on peut énoncer le théorème suivant.

**Théorème 3.2.** *La famille de transformations (ii) se réduit à un seul paramètre  $\gamma = \frac{a_{11}}{a_{12}} \in \mathbb{R}$  dans l'espace  $P_2(\mathbb{R})$ . Cette famille est la suivante :*

$$\alpha = 1 \quad \text{et} \quad T = \begin{pmatrix} \gamma & 1 \\ -1 & \gamma \end{pmatrix}$$

qui envoient un système de la forme

$$S = \begin{cases} \dot{x} &= -y - \frac{6\gamma(a+\gamma n)}{3\gamma^2+1}x^2 + 5axy + ny^2 \\ \dot{y} &= x + ax^2 + (5n - \frac{18\gamma(a+\gamma n)}{3\gamma^2+1})xy \end{cases} \quad (3.5)$$

sur un système de la forme

$$\tilde{S} = \begin{cases} \dot{\tilde{x}} &= -\tilde{y} - 6\gamma(4\gamma a + \gamma^2 n - n)\tilde{x}^2 + 5(3\gamma^3 a - 5\gamma a - 3\gamma^2 n + n)\tilde{x}\tilde{y} \\ &\quad + (15\gamma^2 a - a + 3\gamma^3 n - 5\gamma n)\tilde{y}^2 \\ \dot{\tilde{y}} &= \tilde{x} + (3\gamma^3 a - 5\gamma a - 3\gamma^2 n + n)\tilde{x}^2 + (3\gamma^2 a - 5a - 3\gamma^3 n - 7\gamma n)\tilde{x}\tilde{y}. \end{cases} \quad (3.6)$$

DÉMONSTRATION. La preuve découle directement de la remarque 3.1. □

**Corollaire 3.2.** *Considérons la famille de transformations  $\bar{g}$  énoncée au théorème 3.2.*

*Si  $\gamma \neq 0$ , alors on a la relation suivante :*

$$\tilde{l} = 2\gamma(2l + 3n).$$

DÉMONSTRATION. Considérons les paramètres  $l$  et  $\tilde{l}$  des systèmes  $S$  et  $\tilde{S}$  du théorème 3.2.

$$l + \frac{6\gamma(a + \gamma n)}{3\gamma^2 + 1} = 0 \quad (3.7)$$

$$\tilde{l} + \frac{6\gamma(4a\gamma + \gamma^2 n - n)}{3\gamma^2 + 1} = 0 \quad (3.8)$$

On suppose  $\gamma \neq 0$  et on calcule  $4\gamma(3.7) - (3.8)$ . Ceci nous donne

$$\begin{aligned} 4\gamma l + \frac{24\gamma^2(a + \gamma n)}{3\gamma^2 + 1} - \tilde{l} - \frac{6\gamma(4a\gamma + \gamma^2 n - n)}{3\gamma^2 + 1} &= 0 \\ 4\gamma l - \tilde{l} + \frac{18\gamma^3 n + 6\gamma n}{3\gamma^2 + 1} &= 0 \\ 4\gamma l - \tilde{l} + \frac{6\gamma n(3\gamma^2 + 1)}{3\gamma^2 + 1} &= 0 \\ 4\gamma l - \tilde{l} + 6\gamma n &= 0. \end{aligned}$$

En isolant  $\tilde{l}$ , on obtient le résultat voulu.  $\square$

### 3.2. APPLICATION DES THÉORÈMES ET ANALYSE PARTIELLE DES RÉSULTATS

Les théorèmes et corollaires démontrés à la section 3.1 nous indiquent que le groupe  $\tilde{\mathbf{G}}$  continue d'agir sur  $\mathbf{hD}$ . Certains systèmes  $S$  sont effectivement envoyés sur d'autres systèmes  $\tilde{S}$  par l'action du groupe. Quelles régions de  $\mathbf{hD}$ , visualisées sur le demi-disque avec les points opposés du diamètre identifiés, s'identifient entre elles? Cette section propose une analyse partielle de l'application du théorème 3.2.

**Proposition 3.2.** *Considérons la famille de transformations définie au théorème 3.2 avec  $n = 0$ . Alors*

- (i) *les systèmes correspondant aux points  $[\sqrt{3} : -\sqrt{5} : 0]$  et  $[\sqrt{3} : \sqrt{5} : 0]$  dans  $\mathbf{hD}$  sont  $\tilde{\mathbf{G}}$ -équivalents.*
- (ii) *les systèmes dont les paramètres correspondent aux points de la droite  $n = 0$  avec  $-\sqrt{3} \leq l \leq \sqrt{3}$  sont  $\tilde{\mathbf{G}}$ -équivalents aux systèmes dont les paramètres correspondent aux points de la courbe  $\tilde{\Omega}$ , définie par l'équation  $l(3l + 5n)^2 - 3a^2(5l + 8n) = 0$ .*

*Tous ces systèmes sont des systèmes de **QW3**, à l'exception des systèmes correspondant aux points  $[\sqrt{3} : \pm\sqrt{5} : 0]$  et  $[1 : 0 : 0]$ .*

**DÉMONSTRATION.** Considérons les paramètres des systèmes initiaux et transformés théorème 3.2, avec  $n = 0$ . Dans  $P_2(\mathbb{R})$ , on a  $\lambda = [a : \frac{-6\gamma a}{3\gamma^2 + 1} : 0]$  et  $\tilde{\lambda} = [\gamma a(3\gamma^2 - 5) : -24\gamma^2 a : a(15\gamma^2 - 1)]$ , avec  $a \neq 0$ . Comme on travaille dans  $P_2(\mathbb{R})$ , on peut simplement considérer  $\lambda = [1 : \frac{-6\gamma}{3\gamma^2 + 1} : 0]$  et  $\tilde{\lambda} = [\gamma(3\gamma^2 - 5) : -24\gamma^2 : 15\gamma^2 - 1]$  en divisant par  $a$ . Pour tout  $(a, l)$  fixé, on peut trouver 2 valeurs de  $\gamma$  selon la relation

$$l = \frac{-6\gamma}{3\gamma^2 + 1} \Leftrightarrow 3l\gamma^2 + 6\gamma + l = 0 \Leftrightarrow \gamma = \frac{-3 \pm \sqrt{3(3 - l^2)}}{3l}$$

en autant que  $-\sqrt{3} \leq l \leq \sqrt{3}$ , puisque  $\gamma$  doit être réel. Ainsi,  $\forall l \in [-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$  et  $\forall a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , il existe une matrice de la forme  $T$  et deux systèmes  $S$  et  $\tilde{S}$  tel que  $\tilde{S} = TS$ .

**Cas (i) :** On aura  $S$  sur la droite  $n = 0$  et  $\tilde{S}$  sur la droite  $\tilde{n} = 0$  si et seulement si  $15\gamma^2 = 1$ . Les seuls cas où cela se produit sont

- (1) si  $\gamma = \frac{1}{\sqrt{15}}$ . Alors, en calculant, on obtient  $(a, l) = (\sqrt{3}, -\sqrt{5})$ , ce qui correspond au point  $[\sqrt{3} : -\sqrt{5} : 0]$  dans  $\mathbf{hD}$ . De plus, on aurait  $(\tilde{a}, \tilde{l}) = (\sqrt{3}, \sqrt{5})$ , ce qui correspond au point  $[\sqrt{3} : \sqrt{5} : 0]$  dans  $\mathbf{hD}$ .
- (2) si  $\gamma = -\frac{1}{\sqrt{15}}$ . Alors, en calculant, on obtient  $(a, l) = (\sqrt{3}, \sqrt{5})$ , ce qui correspond au point  $[\sqrt{3} : \sqrt{5} : 0]$  dans  $\mathbf{hD}$ . De plus, on aurait  $(\tilde{a}, \tilde{l}) = (\sqrt{3}, -\sqrt{5})$ , ce qui correspond au point  $[\sqrt{3} : -\sqrt{5} : 0]$  dans  $\mathbf{hD}$ .

Ceci démontre le cas (i) de la proposition, et tous les autres points  $p$  de la droite  $n = 0$  dans  $\mathbf{hD}$  seront envoyés ailleurs dans  $\mathbf{hD}$ .

**Cas (ii) :** On peut maintenant supposer  $\tilde{n} = (15\gamma^2 - 1) \neq 0$ . On considère donc  $\lambda = \left[1 : \frac{-6\gamma}{3\gamma^2+1} : 0\right]$  et  $\tilde{\lambda} = [\gamma(3\gamma^2 - 5) : -24\gamma^2 : 15\gamma^2 - 1]$  dans  $P_2(\mathbb{R})$ , avec  $\gamma = \frac{-3 \pm \sqrt{3(3-l^2)}}{3l}$ . Posons  $\gamma_+ = \frac{-3 + \sqrt{3(3-l^2)}}{3l}$  et  $\gamma_- = \frac{-3 - \sqrt{3(3-l^2)}}{3l}$ .

En remplaçant  $\gamma$  par  $\gamma_+$  dans  $\lambda$  et  $\tilde{\lambda}$ , on obtient

$$\lambda = [1 : l : 0]$$

et

$$\tilde{\lambda} = \left[ \frac{6 - 2\sqrt{9-3l^2} + l^2(-4 + \sqrt{9-3l^2})}{l(3l^2 + 5(-3 + \sqrt{9-3l^2}))} : \frac{4l^2}{3-3l^2 + \sqrt{9-3l^2}} : 1 \right].$$

Ces valeurs  $\tilde{a}, \tilde{l}, \tilde{n}$  satisfont l'équation de  $\bar{\Omega}$ , i.e.  $l(3l + 5n)^2 - 3a^2(5l + 8n) = 0$ .

De façon analogue, en remplaçant  $\gamma$  par  $\gamma_-$  dans  $\lambda$  et  $\tilde{\lambda}$ , on obtient

$$\lambda = [1 : l : 0]$$

et

$$\tilde{\lambda} = \left[ \frac{(3 + \sqrt{9-3l^2})(3-3l^2 + \sqrt{9-3l^2})}{3l(3l^2 - 5(3 + \sqrt{9-3l^2}))} : -\frac{4l^2}{-3 + 3l^2 + \sqrt{9-3l^2}} : 1 \right].$$

Encore une fois, ces valeurs  $\tilde{a}, \tilde{l}, \tilde{n}$  satisfont l'équation de  $\bar{\Omega}$ . Ceci démontre le cas (ii) de la proposition.

En observant le diagramme de bifurcation de la figure (2.1), les systèmes correspondant aux points  $[\sqrt{3} : \pm\sqrt{5} : 0]$  et  $[1 : 0 : 0]$  sont les seuls systèmes à centre dans l'intervalle observé.  $\square$

**Proposition 3.3.** *Considérons la famille de transformations définie au théorème 3.2 avec  $n \neq 0$ . Alors, les systèmes correspondant aux points de la droite  $l + 2n = 0$  dans  $\mathbf{hD}$  sont  $\tilde{\mathbf{G}}$ -équivalents aux systèmes dont les paramètres correspondent aux points de la courbe  $\delta = 0$ , i.e.  $3a^2 - l(l + 2n) = 0$ , dans  $\mathbf{hD}$ .*

*En particulier, le système correspondant au point  $[-1 : -2\sqrt{3} : \sqrt{3}]$  situé à l'intersection de la courbe  $l + 2n = 0$  et  $\bar{\Omega} = 0$  est  $\mathbf{G}$ -équivalent aux systèmes correspondants aux points à l'infini de la courbe  $\delta = 0$ , soit  $[1 : \sqrt{3} : 0]$  et  $[1 : -\sqrt{3} : 0]$ .*

*À l'exception des extrémités dans  $\mathbf{hD}$  de la droite  $l + 2n = 0$ , tous les points de cette droite correspondent à des systèmes de  $\mathbf{QW3}$ .*

DÉMONSTRATION. Considérons les systèmes initiaux et transformés du théorème 3.2 avec  $n \neq 0$ . Supposons que les systèmes initiaux correspondent aux points de la droite  $l + 2n = 0$ . Puisque  $n \neq 0$ , on peut prendre  $n = 1$  alors on doit avoir  $l = -2$ . Comme on a  $\lambda = \left[ a : \frac{-6(\gamma a + \gamma^2)}{3\gamma^2 + 1} : 1 \right]$ , cela se traduit par

$$\begin{aligned} \frac{-6(\gamma a + \gamma^2)}{3\gamma^2 + 1} &= -2 \\ \Leftrightarrow 3\gamma a &= 1 \\ \Leftrightarrow \gamma &= \frac{1}{3a} \end{aligned}$$

car  $a \neq 0$ . Ainsi, on aura un système transformé dont les paramètres sont

$$\begin{aligned} [\tilde{a} : \tilde{l} : \tilde{n}] &= \left[ \frac{-2(3a^2 + 1)}{9a^2} : \frac{-2(3a^2 + 1)}{9a^3} : \frac{(1 - 3a^2)(1 + 3a^2)}{9a^3} \right] \\ &= \left[ -2 : \frac{-2}{a} : \frac{1 - 3a^2}{a} \right]. \end{aligned}$$

Ces valeurs  $\tilde{a}, \tilde{l}, \tilde{n}$  satisfont l'équation de  $\delta = 0$ , i.e.  $3\tilde{a}^2 - \tilde{l}(\tilde{l} + 2\tilde{n}) = 0$  et ceci démontre la première partie de la proposition.

Pour la deuxième partie, considérons 2 cas particuliers :  $a = \frac{1}{\sqrt{3}}$  ou  $a = \frac{-1}{\sqrt{3}}$  (i.e.  $\tilde{n}=0$ ).

- Si  $a = \frac{1}{\sqrt{3}}$ , alors on a  $\lambda = [1 : -2\sqrt{3} : \sqrt{3}]$  et  $\tilde{\lambda} = [1 : \sqrt{3} : 0]$ . Le point d'intersection entre la droite  $l + 2n = 0$  et la courbe  $\bar{\Omega}$  est donc  $\mathbf{G}$ -équivalent au point à l'infini avec  $l > 0$  de l'hyperbole  $\delta = 0$ .
- Si  $a = \frac{-1}{\sqrt{3}}$ , alors on a  $\lambda = [-1 : -2\sqrt{3} : \sqrt{3}]$  et  $\tilde{\lambda} = [1 : -\sqrt{3} : 0]$ . Le point  $\lambda$  n'est pas dans  $\mathbf{hD}$ , mais on peut appliquer la symétrie définie par  $(X, Y, T) = (-x, y, -t)$  et on se ramène à  $\lambda = [1 : -2\sqrt{3} : \sqrt{3}]$ . Le point d'intersection entre la droite  $l + 2n = 0$  et la courbe  $\bar{\Omega}$  est donc aussi  $\mathbf{G}$ -équivalent au point à l'infini avec  $l > 0$  de l'hyperbole  $\delta = 0$ .

□

**Proposition 3.4.** *Considérons la famille de transformations définie au théorème 3.2 avec  $n \neq 0$ . Alors, l'action du groupe  $\tilde{\mathbf{G}}$  transforme les systèmes correspondant aux points de la région ouverte  $R_2$  sur ceux de la région  $R_4 \cup R_5$  dans  $\mathbf{hD}$ .*

Tous les points des régions  $R_2, R_3$  et  $R_4$  correspondent à des systèmes de **QW3**.

DÉMONSTRATION. Considérons les systèmes dont les paramètres se situent dans les régions  $R_2, R_4$  et  $R_5$ . Comme tous ces systèmes satisfont  $n > 0$ , on peut supposer  $n = 1$  et travailler dans le plan affine  $(a, l)$ . La région ouverte  $R_2$  est délimitée par les courbes  $\delta$  et  $\bar{\Omega}$ , et est caractérisée par  $\delta > 0, \bar{\Omega} > 0$ , c'est-à-dire

$$R_2 = \{(a, l) \mid \delta(a, l, 1) > 0, \bar{\Omega}(a, l, 1) > 0\}.$$

Les régions ouvertes  $R_4$  et  $R_5$  sont toutes les deux délimitées par la droite  $l+2 = 0$  et par la courbe  $\bar{\Omega}$ . Elles sont caractérisées comme

$$\begin{aligned} R_4 &= \{(a, l) \mid l+2 > 0, \bar{\Omega}(a, l, 1) > 0\} \\ R_5 &= \{(a, l) \mid l+2 < 0, \bar{\Omega}(a, l, 1) > 0\}. \end{aligned}$$

Les équations de  $\delta$  et  $\bar{\Omega}$  proviennent respectivement de (2.19) et (2.18).

Considérons un système initial dont les paramètres correspondent à un point  $\lambda \in R_2$ . Par le théorème 3.2, les paramètres de ce système initial sont

$$\lambda = \left[ a : \frac{-6\gamma(a+\gamma)}{3\gamma^2+1} : 1 \right].$$

Alors, l'expression de  $\bar{\Omega}(a(\gamma), l(a, \gamma), 1)$  pour ce système est

$$\frac{6(-a-5\gamma+15a\gamma^2+3\gamma^3)(4a+5\gamma-15a^2\gamma-24a\gamma^2-3\gamma^3+9a^2\gamma^3)}{(1+3\gamma^2)^3} \quad (3.9)$$

et l'expression de  $\delta(a(\gamma), l(a, \gamma), 1)$  est

$$\frac{3(-a-2\gamma+3a\gamma^2)^2}{(1+3\gamma^2)^2}. \quad (3.10)$$

Comme  $\lambda \in R_2$ , ce point satisfait  $\bar{\Omega} > 0$  et  $\delta > 0$ , ce qui nous donne les deux inégalités  $I_1$  et  $I_2$  suivantes :

$$\frac{6(-a-5\gamma+15a\gamma^2+3\gamma^3)(4a+5\gamma-15a^2\gamma-24a\gamma^2-3\gamma^3+9a^2\gamma^3)}{(1+3\gamma^2)^3} > 0 \quad (I_1)$$

et

$$\frac{3(-a-2\gamma+3a\gamma^2)^2}{(1+3\gamma^2)^2} > 0. \quad (I_2)$$



De plus, on observe que tout  $\lambda \in \mathbb{R}_2$  satisfait  $l > 0$ , ce qui nous donne la troisième inégalité  $I_3$

$$\frac{-6\gamma(a + \gamma)}{3\gamma^2 + 1} > 0. \quad (I_3)$$

Les trois inégalités  $(I_1)$ ,  $(I_2)$  et  $(I_3)$  se simplifient de la manière suivante :

$$(-a - 5\gamma + 15a\gamma^2 + 3\gamma^3)(4a + 5\gamma - 15a^2\gamma - 24a\gamma^2 - 3\gamma^3 + 9a^2\gamma^3) > 0 \quad (I'_1)$$

$$(-a - 2\gamma + 3a\gamma^2) \neq 0 \quad (I'_2)$$

$$\gamma(a + \gamma) < 0. \quad (I'_3)$$

Considérons le système transformé, dont les paramètres correspondent à un point  $\tilde{\lambda} \in P_2(\mathbb{R})$ . Par le théorème 3.2, on aura

$$\tilde{\lambda} = [3\gamma^3 a - 5\gamma a - 3\gamma^2 + 1 : -6(4\gamma^2 a + \gamma^3 - \gamma) : 15\gamma^2 a - a + 3\gamma^3 - 5\gamma].$$

Supposons d'abord que  $\tilde{n} = 15\gamma^2 a - a + 3\gamma^3 - 5\gamma = 0$ . Dans ce cas,  $1 - 15\gamma^2 \neq 0$ , sinon,  $\tilde{n}$  serait :

$$15\frac{1}{15}a - a \pm 3\frac{1}{15\sqrt{15}} \mp 5\frac{1}{\sqrt{15}} \neq 0,$$

ce qui mène à une contradiction. On a donc  $\tilde{n} = 0$  si

$$a = \frac{\gamma(3\gamma^2 - 5)}{1 - 15\gamma^2}.$$

En remplaçant  $a$  par cette expression dans  $\lambda$  et  $\tilde{\lambda}$ , on obtient les paramètres initiaux et transformés suivant :

$$\lambda = \left[ \frac{\gamma(3\gamma^2 - 5)}{1 - 15\gamma^2} : \frac{24\gamma^2}{1 - 15\gamma^2} : 1 \right]$$

et

$$\tilde{\lambda} = \left[ \frac{(1 + \gamma^2)(1 + 3\gamma^2)^2}{1 - 15\gamma^2} : \frac{6\gamma(1 + \gamma^2)(1 + 3\gamma^2)}{1 - 15\gamma^2} : 0 \right] = [1 + 3\gamma^2 : 6\gamma : 0].$$

En calculant, on trouve  $\lambda = \left[ \frac{\gamma(3\gamma^2 - 5)}{1 - 15\gamma^2} : \frac{24\gamma^2}{1 - 15\gamma^2} : 1 \right] \in \tilde{\Omega}$ , et alors  $\lambda \notin \mathbb{R}_2$ , ce qui entraîne une contradiction.

On a donc  $\tilde{n} \neq 0$ . On se ramène au plan affine en divisant par  $\tilde{n}$ . On obtient le point suivant dans  $P_2(\mathbb{R})$  :

$$\tilde{\lambda} = \left[ \frac{3\gamma^3 a - 5\gamma a - 3\gamma^2 + 1}{15\gamma^2 a - a + 3\gamma^3 - 5\gamma} : \frac{-6(4\gamma^2 a + \gamma^3 - \gamma)}{15\gamma^2 a - a + 3\gamma^3 - 5\gamma} : 1 \right].$$

On étudie alors le signe de  $\tilde{\Omega}$ ,  $\delta$  et  $l$  pour  $\tilde{\lambda}$ . On a

$$\tilde{\Omega}(\tilde{a}(a, \gamma), \tilde{l}(a, \gamma), 1) = \frac{6(1 + \gamma^2)^2(1 + 3\gamma^2)(4a + 5\gamma - 15a^2\gamma - 24a\gamma^2 - 3\gamma^3 + 9a^2\gamma^3)}{(-a - 5\gamma + 15a\gamma^2 + 3\gamma^3)^3}.$$

En comparant avec (3.9), on peut remarquer que

$$\bar{\Omega}(\tilde{a}, \tilde{l}, 1) = \frac{(1 + \gamma^2)^2 (1 + 3\gamma^2)^4}{(-a - 5\gamma + 15a\gamma^2 + 3\gamma^3)^4} \cdot \bar{\Omega}(a, l, 1).$$

On en déduit que  $\bar{\Omega}$  est de même signe pour les systèmes initiaux et transformés. Par l'inégalité (I<sub>1</sub>), on peut conclure que  $\bar{\Omega}(\tilde{a}, \tilde{l}) > 0$ . Les seules régions où on a  $\bar{\Omega} > 0$  sont  $R_2$ ,  $R_4$  et  $R_5$ . Nous allons montrer que le paramètre transformé  $\tilde{\lambda}$  ne peut pas être dans  $R_2$ .

On s'intéresse au signe de  $\tilde{l}$ . On a

$$\tilde{l}(\tilde{a}(a, \gamma)) = -\frac{6\gamma(-1 + 4a\gamma + \gamma^2)}{-a - 5\gamma + 15a\gamma^2 + 3\gamma^3}.$$

Par le corollaire 3.1, on a la relation

$$\tilde{l} = 2\gamma(2l + 3). \quad (3.11)$$

avec  $n = 1$ . Pour tout  $\lambda, \tilde{\lambda} \in \mathbf{hD}$ ,  $a > 0$ . Si  $\gamma > 0$ , alors nécessairement  $a + \gamma > 0$  et ceci contredit l'inégalité (I<sub>3</sub>). On en conclut donc que  $\gamma > 0$ . L'équation (3.11) entraîne alors nécessairement  $\tilde{l} < 0$ , et donc  $\tilde{\lambda} \notin R_2$ .  $\square$

**Conclusion :** Les théorèmes 3.1, 3.2 ainsi que les propositions 3.2, 3.3, 3.4 montrent qu'il existe des points distincts de  $\mathbf{hD} \cap \mathbf{QW3}$  se trouvant sur la même orbite par l'action du groupe  $\mathbf{G}$ . On obtient donc :

**Théorème 3.3.** *L'action de  $\mathbf{G}$  n'est pas triviale sur  $\mathbf{hD} \cap \mathbf{QW3}$ .*

On peut alors se demander si le groupe  $\mathbf{G}$  agit partout sur  $\mathbf{hD} \cap \mathbf{QW3}$ , ou seulement sur un sous-ensemble propre de cet espace. Le théorème suivant donne une réponse à cette question.

**Théorème 3.4.** *Le groupe  $\mathbf{G}$  agit sur tous les systèmes dont les paramètres correspondent aux points  $\lambda \in \mathbf{hD}$  pour lesquels  $\delta \geq 0$ .*

DÉMONSTRATION. Considérons un point  $\lambda = [a : l : n] \in \mathbf{hD}$ . Le théorème 3.2 nous indique que le groupe  $\mathbf{G}$  n'agit de façon non triviale que sur les systèmes de la forme (3.5), i.e. sur un point de la forme  $\lambda = \left[ a : -\frac{6\gamma(a+\gamma n)}{3\gamma^2+1} : n \right] \in \mathbf{hD}$ . Autrement dit, on doit avoir la relation suivante :

$$\begin{aligned} l = -\frac{6\gamma(a+\gamma n)}{3\gamma^2+1} &\Leftrightarrow (al + 6n)\gamma^2 + 6\gamma a + l = 0 \\ &\Leftrightarrow \gamma = \frac{-3a \pm \sqrt{9a^2 - l(3l + 6n)}}{3l + 6n}. \end{aligned}$$

Puisque  $\gamma$  est un paramètre réel, on a nécessairement

$$9a^2 - l(3l + 6n) \geq 0$$

i.e.

$$3a^2 - l(l + 2n) \geq 0.$$

L'équation  $3a^2 - l(l + 2n) = 0$  est l'équation (2.19) de la courbe  $\delta$  et ceci démontre le théorème.  $\square$



## Chapitre 4

---

### ACTION LOCALE DU GROUPE $GL(2, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}^*$ SUR LA FORME NORMALE DE BAUTIN POUR QW3

Au chapitre 3, nous avons travaillé avec la forme normale de Li, car cette forme s'est avérée très efficace pour réaliser le diagramme de bifurcation de QW3. Par contre, les résultats obtenus au théorème 3.1 sont complexes et on aurait du mal à construire l'espace des orbites  $QW3/G$ . On cherche alors s'il était plus simple de construire cet espace en utilisant une autre forme normale, soit celle de Bautin.

#### 4.1. FORME NORMALE DE BAUTIN POUR QW3

Voyons comment la forme normale de Bautin a été développée. On a vu à la section 2.2 que tout système quadratique possédant un foyer faible ou un centre peut s'écrire sous la forme

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y + a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2 \\ \dot{y} &= x + b_{20}x^2 + b_{11}xy + b_{02}y^2\end{aligned}\tag{4.1}$$

avec  $(a_{20}, a_{11}, a_{02}, b_{20}, b_{11}, b_{02}) \in \mathbb{R}^6 \setminus \{(0, 0, 0, 0, 0, 0)\}$  puisqu'on ne considère pas le cas linéaire. On peut à présent introduire une nouvelle forme normale, celle de Bautin, tirée de [6].

**Proposition 4.1.** *Tout système possédant un foyer faible peut s'écrire sous la forme normale*

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y - mx^2 + (2a + l)xy + ny^2 \\ \dot{y} &= x + ax^2 + (2m + b)xy - ay^2\end{aligned}\tag{4.2}$$

*par un changement de variables linéaire et un changement d'échelle de la variable indépendante. Cette transformation dépendant continûment des paramètres.*

DÉMONSTRATION. On étudie deux cas possibles. D'abord, si on a  $b_{20} + b_{02} = 0$ , on obtient directement le résultat voulu. Il suffit de poser  $m = -a_{20}$ ,  $n = a_{02}$ ,  $a = b_{20}$ ,  $l = a_{11} - 2b_{20}$  et  $b = b_{11} + 2a_{20}$ . Sinon, supposons que  $b_{20} + b_{02} \neq 0$  et appliquons le changement de variables

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \quad (4.3)$$

où  $X, Y \in \mathbb{R}$ . On cherche  $\theta$  tel que cette transformation ramène (4.1) à la forme (4.2). On a

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

et le système (4.1) devient

$$\begin{aligned} \dot{X} &= \dot{x} \cos\theta - \dot{y} \sin\theta \\ \dot{Y} &= \dot{x} \sin\theta + \dot{y} \cos\theta. \end{aligned}$$

On peut remplacer  $x$  et  $y$  par les équations (4.3), on obtient un système de la forme

$$\begin{aligned} \dot{X} &= -Y + \tilde{a}_{20}X^2 + \tilde{a}_{11}XY + \tilde{a}_{02}Y^2 \\ \dot{Y} &= X + \tilde{b}_{20}X^2 + \tilde{b}_{11}XY + \tilde{b}_{02}Y^2 \end{aligned}$$

où les coefficients  $\tilde{a}_{20}, \tilde{a}_{11}, \tilde{a}_{02}, \tilde{b}_{20}, \tilde{b}_{11}, \tilde{b}_{02}$  dépendent de  $\theta, a_{ij}, b_{ij}$  pour  $i, j = 0, 1, 2$ . En particulier, on aura

$$\begin{aligned} \tilde{b}_{20} &= b_{20} \cos^3\theta + (a_{20} - b_{11})\cos^2\theta \sin^2\theta \\ &\quad - (a_{11} - b_{02})\cos\theta \sin^2\theta + a_{02}\sin^3\theta \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \tilde{b}_{02} &= b_{02} \cos^3\theta + (a_{02} + b_{11})\cos^2\theta \sin^2\theta \\ &\quad + (a_{11} + b_{20})\cos\theta \sin^2\theta + a_{20}\sin^3\theta. \end{aligned}$$

Considérons

$$\begin{aligned} \tilde{b}_{20} + \tilde{b}_{02} &= (b_{20} + b_{02}) \cos^3\theta + (a_{20} + a_{02})\cos^2\theta \sin^2\theta \\ &\quad + (b_{20} + b_{02})\cos\theta \sin^2\theta + (a_{02} + a_{02})\sin^3\theta. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Comme on a supposé  $b_{20} + b_{02} \neq 0$ , l'équation (4.4) est un polynôme cubique trigonométrique et n'est pas identiquement nul. Il existe donc une solution réelle  $\theta_0$  qui dépend des paramètres de façon continue. Ainsi, il existe un  $\theta_0 \in \mathbb{R}$  tel que  $\tilde{b}_{20} + \tilde{b}_{02} = 0$ . Toutes les transformations utilisées sont continues et la proposition est démontrée.  $\square$

En posant  $m = (v - b)/3$  dans le système (4.2), on obtient

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y - \frac{(v-b)}{3}x^2 + (2a+l)xy + ny^2 \\ \dot{y} &= x + ax^2 + \frac{(2v+b)}{3}xy - ay^2\end{aligned}\quad (4.5)$$

ce qui permet d'obtenir un diagramme de bifurcation plus aisé à lire qui est donné dans [6] et qui apparaît à la figure 5.1. Nous avons donc une forme normale avec cinq paramètres réels, soit  $(l, a, v, b, n) \in \mathbb{R}^5 \setminus \{0\}$ . Selon cette forme normale et [6], les constantes de Poincaré-Lyapunov sont

$$\begin{aligned}L_1 &= l(b + 3n - v), \\ L_2 &= ab(b + 3n - v)(2b + 15n - 5v), \\ L_3 &= ab(b + 3n - v)^2[3a^2 + n(b + 6n - v)].\end{aligned}$$

Pour obtenir un foyer faible d'ordre trois, on doit avoir  $L_1 = 0$ ,  $L_2 = 0$  et  $L_3 \neq 0$ , ce qui nous donne six conditions à respecter simultanément :

- (1)  $b + 3n - v \neq 0$ ,
- (2)  $l = 0$ ,
- (3)  $2b + 15n - 5v = 0$ ,
- (4)  $a \neq 0$ ,
- (5)  $b \neq 0$ ,
- (6)  $3a^2 + n(b + 6n - v) \neq 0$ .

Les équations des conditions (2) et (3) nous indiquent que  $l = 0$  et  $b = \frac{(5v-15n)}{2}$ . En substituant dans (4.5), on obtient le système suivant

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y + \frac{(v-5n)}{2}x^2 + 2axy + ny^2 \\ \dot{y} &= x + ax^2 + \frac{(3v-5n)}{2}xy - ay^2\end{aligned}\quad (4.6)$$

dépendant de trois paramètres  $(a, v, n) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ .

**Remarque 4.1.** *La forme normale (4.6) ne contient pas que des foyers faibles d'ordre trois.*

En effet, pour déterminer la forme normale, nous imposons  $L_1 = L_2 = 0$ . Ainsi, dans le cas où on a aussi des paramètres  $(a, v, n)$  tel que  $L_3 = 0$ , on obtiendra plutôt des systèmes à centre. Par exemple, tous les systèmes pour lesquels  $a = 0$  ont des centres à l'origine.

**Remarque 4.2.** *La forme normale (4.6) dépend de 3 paramètres réels  $(a, v, n)$ , mais l'espace des paramètres peut être réduit à l'espace projectif réel à deux dimensions  $P_2(\mathbb{R})$ .*

Ce résultat est obtenu de manière analogue à la remarque 2.2.

**Proposition 4.2.** *L'espace des paramètres peut être réduit à un demi-disque fermé où les points opposés sur le diamètre sont identifiés grâce à l'action du groupe  $\mathbf{G}$ .*

DÉMONSTRATION. Considérons les classes  $[a : v : n]$ . Si  $n \leq 0$ , on a  $[a : v : n] = [-a : -v : -n]$ . On peut donc supposer que  $n \geq 0$ . Si  $a \geq 0$ , on obtient directement le résultat voulu. Si  $a \leq 0$ , on peut se ramener à  $a \geq 0$  sans changer le signe de  $n$  en appliquant la transformation  $(X, Y, T) = (-x, y, -t)$ . On a alors

$$\begin{aligned} \frac{dX}{dT} &= \frac{dX}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} \cdot \frac{dt}{dT} \\ &= -1 \cdot \dot{x} \cdot -1 \\ &= -y + \frac{(v-5n)}{2}x^2 + 2axy + ny^2 \\ &= -Y + \frac{(v-5n)}{2}X^2 - 2aXY + nY^2 \\ \frac{dY}{dT} &= \frac{dY}{dy} \cdot \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dT} \\ &= 1 \cdot \dot{y} \cdot -1 \\ &= -x - ax^2 - \frac{(3v-5n)}{2}xy + ay^2 \\ &= X - aX^2 + \frac{(3v-5n)}{2}XY + aY^2 \end{aligned}$$

Alors, le système correspondant au paramètre  $\lambda = [a : v : n]$  est topologiquement équivalent au système correspondant à  $\lambda' = [-a : v : n]$ . L'espace des paramètres peut donc être considéré comme le demi-disque fermé constitué des points  $[a : v : n] \in P_2(\mathbb{R})$  où  $a \geq 0$  et  $n \geq 0$ .  $\square$

## 4.2. DIAGRAMME DE BIFURCATION POUR **QW3** À PARTIR DE LA FORME NORMALE DE BAUTIN

Le diagramme de bifurcation de la forme normale de Bautin pour la famille **QW3** a été construit à partir des équations (4.5) par Artès, Llibre et Schlomiuk dans [6]. Il est présenté à la figure 4.1. Les courbes de bifurcation qu'on y retrouve sont données par les équations suivantes :



$$\begin{aligned}
(S_1) \quad \mu &= -\frac{27}{8} (32a^4 - 158a^2n^2 + 125n^4 + 116a^2nv \\
&\quad - 175n^3v - 14a^2v^2 + 75n^2v^2 - 9nv^3) = 0 \\
(S_2) \quad \delta &= -\frac{2187}{4} (16a^4 - 52a^2n^2 - 5n^4 + 40a^2nv \\
&\quad + 16n^3v - 4a^2v^2 - 18n^2v^2 + 8nv^3 - v^4) = 0 \\
(S_5) \quad \eta &= 108a^4 - 27a^2n^2 + 54a^2nv + 9a^2v^2 + 4nv^3 = 0 \\
(S_3) \quad &\frac{3}{2}(v - 3n)(2a^2 + vn - n^2) = 0 \\
(S_4) \quad &\frac{15}{4}a(v - 3n)^2 = 0 \\
(S_6) \quad W_4 &= -\frac{2187}{64} (1769472a^8 - 2045952a^6n^2 + 636336a^4n^4 + 40365a^2n^6 \\
&\quad - 33750n^8 + 2543616a^6nv - 1995840a^4n^3v + 238302a^2n^5v \\
&\quad + 74250n^7v + 165888a^6v^2 + 1184544a^4n^2v^2 - 535005a^2n^4v^2 \\
&\quad - 28350n^6v^2 + 174528a^4nv^3 + 196452a^2n^3v^3 - 24030n^5v^3 \\
&\quad + 7344a^4v^4 + 54243a^2n^2v^4 + 5886n^4v^4 + 5598a^2nv^5 \\
&\quad + 5022n^3v^5 + 109a^2v^6 + 918n^2v^6 + 54nv^7) = 0.
\end{aligned}$$

Les équations  $S_1$ ,  $S_2$  et  $S_5$  représentent des courbes de bifurcation dans  $P_2(\mathbb{R})$  dues aux multiplicités des singularités.

Les équations  $S_3$  et  $S_4$  représentent des courbes de bifurcations due à la nature du point singulier à l'origine, qui sur ces courbes, est un centre. Par perturbation dans **QW3**, le centre à l'origine se change en foyer faible d'ordre 3. Des deux équations  $S_3$  et  $S_4$ , on peut voir que les systèmes à centre sont ceux satisfaisant l'équation

$$a(v - 3n)(2a^2 + vn - n^2) = 0. \quad (4.7)$$

Plus précisément, on a :

- sur  $a = 0$ , on a des systèmes symétriques à centre ;
- sur  $v - 3n = 0$ , on a des systèmes avec trois droites invariantes ;
- sur  $2a^2 + vn - n^2 = 0$ , on a des systèmes ayant une parabole et une cubique invariantes.

(Voir [25])

Finalement, l'équation  $S_6$  n'est pas celle d'une courbe de bifurcation topologique, mais en traversant cette courbe, on a un changement d'un noeud devenant un foyer faible.

Ces équations séparent l'espace en 12 régions. Les systèmes à centre divisent l'espace en 3 régions et sont situés sur (4.7). Ce diagramme semble plus simple à utiliser que celui construit à partir de la forme de Li (figures 2.1 et 2.2), qui comportait 14 régions et où les centres séparaient l'espace en 5 morceaux.

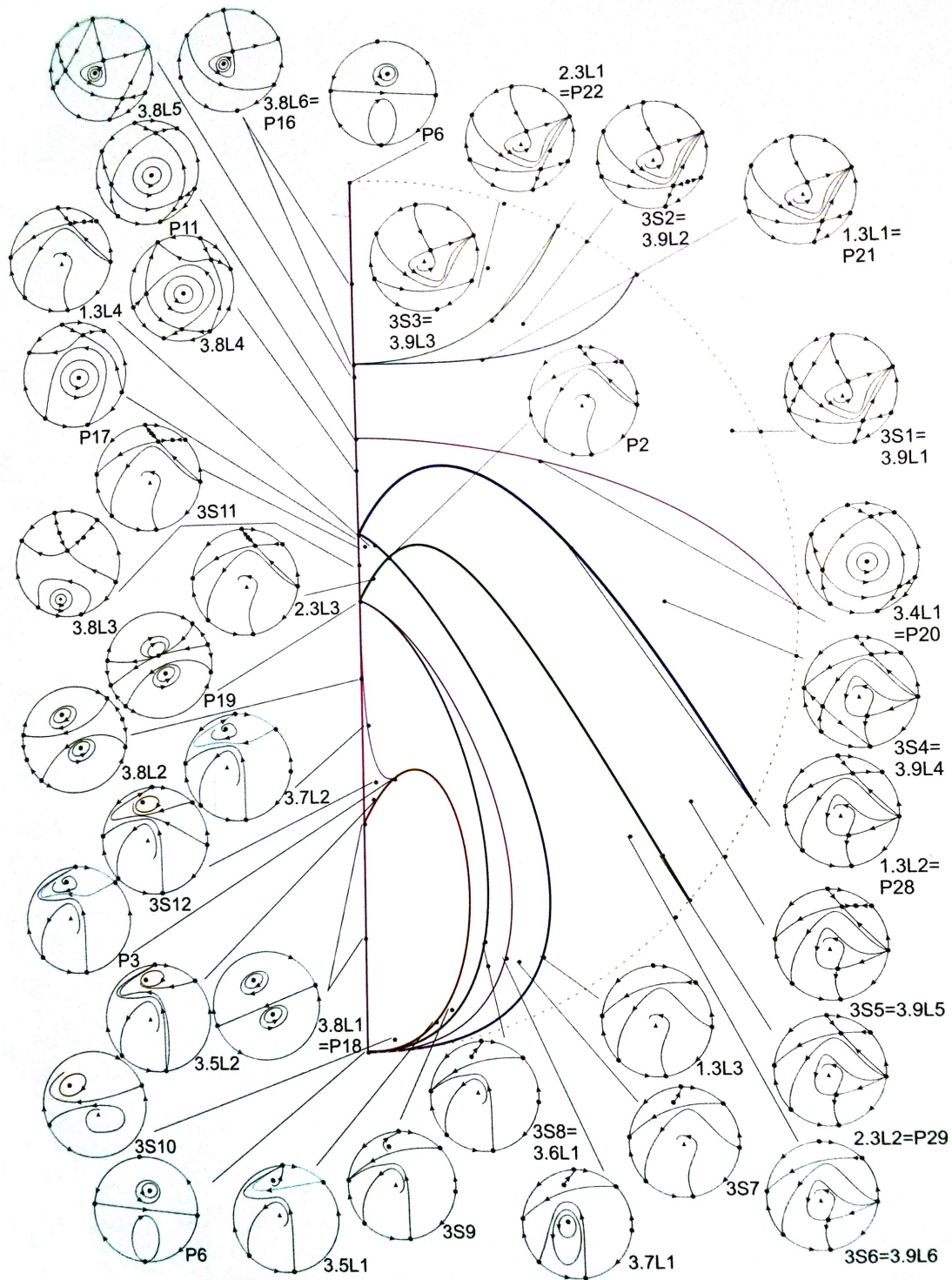


FIGURE 4.1. Diagramme et courbes de bifurcation pour la famille  $QW3$

### 4.3. ACTION DE $\bar{\mathbf{G}}$ SUR L'ESPACE DES PARAMÈTRES DE LA FORME NORMALE DE BAUTIN

Au chapitre 2, nous avons vu qu'un système quadratique à foyer faible ne pouvait contenir qu'un seul foyer faible. Tout comme la forme normale de Li, celle de Bautin fixe le foyer faible à l'origine. Ainsi, nous ne nous intéresserons pas à l'action des translations, mais seulement à l'action du groupe  $\bar{\mathbf{G}} = \text{GL}(2, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}^*$ . On considère d'abord l'action de  $\text{GL}(2, \mathbb{R})$  et nous cherchons s'il existe une transformation linéaire  $T \in \text{GL}(2, \mathbb{R})$  transformant un système  $S$  de la forme (4.6) en un système  $\tilde{S}$  de la même forme. Voici un résultat utile :

**Proposition 4.3.** *Soit  $T = \delta I$ ,  $\delta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , où  $I$  est la matrice identité et soit  $S$  un système de la forme (4.6) de paramètre  $(a, v, n) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ . Alors,*

- (i) *les paramètres de  $TS$  et  $S$  diffèrent par un facteur constant :  $TS$  est de paramètre  $(\delta^{-1}a, \delta^{-1}v, \delta^{-1}n)$ , ce qui donne le même point dans  $P_2(\mathbb{R})$  ;*
- (ii) *si  $(a, v, n) \in \mathbf{hD}$ , i.e.  $(a, v, n) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ ,  $a \geq 0$ ,  $n \geq 0$  avec  $a^2 + v^2 + n^2 = 1$ , alors l'application  $T \rightarrow TS$  est l'identité sur  $\mathbf{hD}$ .*

DÉMONSTRATION. On considère  $\tilde{S} = TS$ , i.e.  $\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} = \delta I \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ . Alors,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \dot{\tilde{x}} \\ \dot{\tilde{y}} \end{pmatrix} &= \delta \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \delta(-y + \frac{(v-5n)}{2}x^2 + 2axy + ny^2) \\ \delta(x + ax^2 + \frac{(3v-5n)}{2}xy - ay^2) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \delta(-\delta^{-1}\tilde{y} + (\delta^{-1})^2\frac{(v-5n)}{2}\tilde{x}^2 + 2a(\delta^{-1})^2\tilde{x}\tilde{y} + n(\delta^{-1})^2\tilde{y}^2) \\ \delta(\delta^{-1}\tilde{x} + a(\delta^{-1})^2\tilde{x}^2 + \frac{(3v-5n)}{2}(\delta^{-1})^2\tilde{x}\tilde{y} - a(\delta^{-1})^2\tilde{x}\tilde{y}) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\tilde{y} + \delta^{-1}\frac{(v-5n)}{2}\tilde{x}^2 + 2a\delta^{-1}\tilde{x}\tilde{y} + n\delta^{-1}\tilde{y}^2 \\ \tilde{x} + a\delta^{-1}\tilde{x}^2 + \frac{(3v-5n)}{2}\delta^{-1}\tilde{x}\tilde{y} - a(\delta^{-1})\tilde{x}\tilde{y} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$S$  est de paramètre  $[a : v : n]$  et suite à la transformation,  $TS$  est de paramètre  $[\delta^{-1}a : \delta^{-1}v : \delta^{-1}n]$ . Ces deux points sont identiques dans l'espace  $P_2(\mathbb{R})$  et en plus, l'application  $T \rightarrow TS$  est l'identité dans  $P_2(\mathbb{R})$ . Si  $(a : v : n) \in \mathbf{hD}$ , alors le système  $TS$  donne le point

$$\frac{\delta^{-1}(a, v, n)}{\sqrt{\delta^{-2}(a^2 + v^2 + n^2)}} = \frac{|\delta|}{\delta}(a, v, n) = \pm 1(a, v, n) \in S^1.$$

- Si  $\delta > 0$ , alors l'application  $S \rightarrow TS$  est l'identité sur  $\mathbf{hD}$ .
- Si  $\delta < 0$ , alors  $\frac{|\delta|}{\delta} = -1$  et on a  $[-a : -v : -n] = [a : v : n] \in \mathbf{hD}$ .

□

#### 4.4. ACTION DE $\bar{\mathbf{G}}$ SUR $P_2(\mathbb{R})$

Soit  $S$  un système de la forme (4.6) et  $T$  une transformation linéaire définie par une matrice réelle régulière  $T$ . On notera  $\tilde{S}$  le système défini par  $S = T\tilde{S}$ .

**Théorème 4.1.** *Considérons des transformations  $\bar{g} = (T, \alpha) \in \bar{\mathbf{G}}$  agissant sur des systèmes  $S$  tel que  $S$  et  $\tilde{S}$  soient de la forme (4.6). Alors, nécessairement,  $\alpha = \pm 1$  et il existe quatre familles de couples  $(\bar{g}, S)$  :*

(i) La transformation définie par  $\alpha = 1$  et  $T = a_{11} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  où  $a_{11} \neq 0$  envoie un système

$$S = \begin{cases} \dot{x} &= -y + \frac{(v-5n)}{2}x^2 + 2axy + ny^2 \\ \dot{y} &= x + ax^2 + \frac{(3v-5n)}{2}xy - ay^2 \end{cases} \quad \text{avec } (a, v, n) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}.$$

sur un système

$$\tilde{S} = \begin{cases} \dot{\tilde{x}} &= -\tilde{y} + a_{11} \frac{(v-5n)}{2} \tilde{x}^2 + 2a_{11} a \tilde{x} \tilde{y} + a_{11} n \tilde{y}^2 \\ \dot{\tilde{y}} &= \tilde{x} + a_{11} a \tilde{x}^2 + a_{11} \frac{(3v-5n)}{2} \tilde{x} \tilde{y} - a_{11} a \tilde{y}^2. \end{cases}$$

(ii) La transformation définie par  $\alpha = -1$  et  $T = a_{11} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$  où  $a_{11} \neq 0$  envoie un système

$$S = \begin{cases} \dot{x} &= -y + \frac{(v-5n)}{2}x^2 + 2axy + ny^2 \\ \dot{y} &= x + ax^2 + \frac{(3v-5n)}{2}xy - ay^2 \end{cases} \quad \text{avec } (a, v, n) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}.$$

sur un système

$$\tilde{S} = \begin{cases} \dot{\tilde{x}} &= -\tilde{y} + a_{11} \frac{(v-5n)}{2} \tilde{x}^2 - 2a_{11} a \tilde{x} \tilde{y} + a_{11} n \tilde{y}^2 \\ \dot{\tilde{y}} &= \tilde{x} - a_{11} a \tilde{x}^2 + a_{11} \frac{(3v-5n)}{2} \tilde{x} \tilde{y} + a_{11} a \tilde{y}^2. \end{cases}$$

(iii) La transformation définie par  $\alpha = 1$  et  $T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ -a_{12} & a_{11} \end{pmatrix}$  où  $a_{11}a_{12} \neq 0$  envoie un système

$$S = \begin{cases} \dot{x} &= -y - nx^2 + 2axy + ny^2 \\ \dot{y} &= x + ax^2 + 2nxy - ay^2 \end{cases} \quad \text{avec } (a, v, n) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}.$$

sur un système

$$\tilde{S} = \begin{cases} \dot{\tilde{x}} &= -\tilde{y} - \frac{3aa_{11}^2a_{12}-aa_{12}^3+na_{11}^3-3na_{11}a_{12}^2}{a_{11}^2+a_{12}^2} \tilde{x}^2 + 2 \frac{aa_{11}^3-3aa_{11}a_{12}^2+na_{12}^3-3na_{11}^2a_{12}}{a_{11}^2+a_{12}^2} \tilde{x} \tilde{y} \\ &\quad + \frac{3aa_{11}^2a_{12}-aa_{12}^3+na_{11}^3-3na_{11}a_{12}^2}{a_{11}^2+a_{12}^2} \tilde{y}^2 \\ \dot{\tilde{y}} &= \tilde{x} + \frac{aa_{11}^3-3aa_{11}a_{12}^2+na_{12}^3-3na_{11}^2a_{12}}{a_{11}^2+a_{12}^2} \tilde{x}^2 + 2 \frac{3aa_{11}^2a_{12}-aa_{12}^3+na_{11}^3-3na_{11}a_{12}^2}{a_{11}^2+a_{12}^2} \tilde{x} \tilde{y} \\ &\quad - \frac{aa_{11}^3-3aa_{11}a_{12}^2+na_{12}^3-3na_{11}^2a_{12}}{a_{11}^2+a_{12}^2} \tilde{y}^2. \end{cases}$$

(iv) La transformation définie par  $\alpha = -1$  et  $T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & -a_{11} \end{pmatrix}$  où  $a_{11}a_{12} \neq 0$  envoie un système

$$S = \begin{cases} \dot{x} = -y - nx^2 + 2axy + ny^2 \\ \dot{y} = x + ax^2 + 2nxy - ay^2 \end{cases} \quad \text{avec } (a, v, n) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}.$$

sur un système

$$\tilde{S} = \begin{cases} \dot{\tilde{x}} = -\tilde{y} - \frac{3aa_{11}^2a_{12} - aa_{12}^3 + na_{11}^3 - 3na_{11}a_{12}^2}{a_{11}^2 + a_{12}^2} \tilde{x}^2 - 2 \frac{aa_{11}^3 - 3aa_{11}a_{12}^2 + na_{12}^3 - 3na_{11}^2a_{12}}{a_{11}^2 + a_{12}^2} \tilde{x}\tilde{y} \\ \quad + \frac{3aa_{11}^2a_{12} - aa_{12}^3 + na_{11}^3 - 3na_{11}a_{12}^2}{a_{11}^2 + a_{12}^2} \tilde{y}^2 \\ \dot{\tilde{y}} = \tilde{x} - \frac{aa_{11}^3 - 3aa_{11}a_{12}^2 + na_{12}^3 - 3na_{11}^2a_{12}}{a_{11}^2 + a_{12}^2} \tilde{x}^2 + 2 \frac{3aa_{11}^2a_{12} - aa_{12}^3 + na_{11}^3 - 3na_{11}a_{12}^2}{a_{11}^2 + a_{12}^2} \tilde{x}\tilde{y} \\ \quad + \frac{aa_{11}^3 - 3aa_{11}a_{12}^2 + na_{12}^3 - 3na_{11}^2a_{12}}{a_{11}^2 + a_{12}^2} \tilde{y}^2. \end{cases}$$

DÉMONSTRATION. Considérons la transformation définie par

$$T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad \text{où } a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \neq 0 \text{ et } t = \alpha \tilde{t}$$

tel que

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix}.$$

Alors,

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{d\tilde{x}}{d\tilde{t}} \\ \frac{d\tilde{y}}{d\tilde{t}} \end{pmatrix} = \frac{1}{\alpha} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\tilde{x}} \\ \dot{\tilde{y}} \end{pmatrix}.$$

Nous avons donc

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \dot{\tilde{x}} \\ \dot{\tilde{y}} \end{pmatrix} &= \alpha \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} \\ &= \left( \frac{\alpha}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \right) \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -y + \frac{(v-5n)}{2}x^2 + 2axy + ny^2 \\ x + ax^2 + \frac{(3v-5n)}{2}xy - ay^2 \end{pmatrix} \\ &= \left( \frac{\alpha}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \right) \begin{pmatrix} a_{22}(-y + \frac{(v-5n)}{2}x^2 + 2axy + ny^2) \\ -a_{12}(x + ax^2 + \frac{(3v-5n)}{2}xy - ay^2) \\ -a_{21}(-y + \frac{(v-5n)}{2}x^2 + 2axy + ny^2) \\ +a_{11}(x + ax^2 + \frac{(3v-5n)}{2}xy - ay^2) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

En remplaçant le côté droit par

$$x = a_{11}\tilde{x} + a_{12}\tilde{y} \quad (4.8)$$

$$y = a_{21}\tilde{x} + a_{22}\tilde{y}, \quad (4.9)$$

nous obtenons deux équations :

$$\dot{\tilde{x}} = \frac{\alpha}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \left( \begin{aligned} &\tilde{x}(-a_{11}a_{12} - a_{21}a_{22}) + \tilde{y}(-a_{12}^2 - a_{22}^2) + \tilde{x}^2(-aa_{11}^2a_{12} + aa_{12}a_{21}^2 \\ &+ 2aa_{11}a_{21}a_{22} + \frac{5}{2}na_{11}a_{12}a_{21} - \frac{5}{2}na_{11}^2a_{22} + na_{21}^2a_{22} - \frac{3}{2}va_{11}a_{12}a_{21} \\ &+ \frac{1}{2}va_{11}^2a_{22}) + \tilde{x}\tilde{y}(-2aa_{11}a_{12}^2 + 4aa_{12}a_{21}a_{22} + 2aa_{11}a_{22}^2 + \frac{5}{2}na_{12}^2a_{21} \\ &- \frac{5}{2}na_{11}a_{12}a_{22} + 2na_{21}a_{22}^2 - \frac{3}{2}3va_{12}^2a_{21} - \frac{1}{2}va_{11}a_{12}a_{22}) + \tilde{y}^2(-aa_{12}^3 \\ &+ 3aa_{12}a_{22}^2 + na_{22}^3 - va_{12}^2a_{22}). \end{aligned} \right)$$

et

$$\dot{\tilde{y}} = \frac{\alpha}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \left( \begin{aligned} &\tilde{x}(a_{11}^2 + a_{21}^2) + \tilde{y}(a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22}) + \tilde{x}^2(aa_{11}^3 - 3aa_{11}a_{21}^2 - na_{21}^3 \\ &+ va_{11}^2a_{21}) + \tilde{x}\tilde{y}(2aa_{11}^2a_{12} - 2aa_{12}a_{21}^2 - 4aa_{11}a_{21}a_{22} + \frac{5}{2}na_{11}a_{12}a_{21} \\ &- \frac{5}{2}na_{11}^2a_{22} - 2na_{21}^2a_{22} + \frac{1}{2}va_{11}a_{12}a_{21} + \frac{3}{2}va_{11}^2a_{22}) + \tilde{y}^2(aa_{11}a_{12}^2 \\ &- 2aa_{12}a_{21}a_{22} - aa_{11}a_{22}^2 + \frac{5}{2}na_{12}^2a_{21} - \frac{5}{2}na_{11}a_{12}a_{22} - na_{21}a_{22}^2 \\ &- \frac{1}{2}va_{12}^2a_{21} + \frac{3}{2}va_{11}a_{12}a_{22}) \end{aligned} \right).$$

Les coefficients  $\tilde{a}_{ij}$ ,  $\tilde{b}_{ij}$  du système transformé dépendent de  $\alpha$ , des coefficients  $a_{11}$ ,  $a_{12}$ ,  $a_{21}$ ,  $a_{22}$  ainsi que des paramètres  $a$ ,  $v$ ,  $n$ . Ils sont exprimés explicitement par les équations ci-dessous :

$$\tilde{a}_{10} = \frac{\alpha}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} (-a_{11}a_{12} - a_{21}a_{22})$$

$$\tilde{a}_{01} = \frac{\alpha}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} (-a_{12}^2 - a_{22}^2)$$

$$\begin{aligned} \tilde{a}_{20} = \frac{\alpha}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} & \left( -aa_{11}^2a_{12} + aa_{12}a_{21}^2 + 2aa_{11}a_{21}a_{22} + \frac{5}{2}na_{11}a_{12}a_{21} - \frac{5}{2}na_{11}^2a_{22} \right. \\ & \left. + na_{21}^2a_{22} - \frac{3}{2}va_{11}a_{12}a_{21} + \frac{1}{2}va_{11}^2a_{22} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{a}_{11} = \frac{\alpha}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} & \left( -2aa_{11}a_{12}^2 + 4aa_{12}a_{21}a_{22} + 2aa_{11}a_{22}^2 + \frac{5}{2}na_{12}^2a_{21} - \frac{5}{2}na_{11}a_{12}a_{22} \right. \\ & \left. + 2na_{21}a_{22}^2 - \frac{3}{2}va_{12}^2a_{21} - \frac{1}{2}va_{11}a_{12}a_{22} \right) \end{aligned}$$

$$\tilde{a}_{02} = \frac{\alpha}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} (-aa_{12}^3 + 3aa_{12}a_{22}^2 + na_{22}^3 - va_{12}^2a_{22})$$

$$\begin{aligned}
\tilde{b}_{10} &= \frac{\alpha}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} (a_{11}^2 + a_{21}^2) \\
\tilde{b}_{01} &= \frac{\alpha}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} (a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22}) \\
\tilde{b}_{20} &= \frac{\alpha}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} (aa_{11}^3 - 3aa_{11}a_{21}^2 - na_{21}^3 + va_{11}^2a_{21}) \\
\tilde{b}_{11} &= \frac{\alpha}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} (2aa_{11}^2a_{12} - 2aa_{12}a_{21}^2 - 4aa_{11}a_{21}a_{22} + \frac{5}{2}na_{11}a_{12}a_{21} - \frac{5}{2}na_{11}^2a_{22} \\
&\quad - 2na_{21}^2a_{22} + \frac{1}{2}va_{11}a_{12}a_{21} + \frac{3}{2}va_{11}^2a_{22}) \\
\tilde{b}_{02} &= \frac{\alpha}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} (aa_{11}a_{12}^2 - 2aa_{12}a_{21}a_{22} - aa_{11}a_{22}^2 + \frac{5}{2}na_{12}^2a_{21} - \frac{5}{2}na_{11}a_{12}a_{22} \\
&\quad - na_{21}a_{22}^2 - \frac{1}{2}va_{12}^2a_{21} + \frac{3}{2}va_{11}a_{12}a_{22}) .
\end{aligned}$$

Pour obtenir un système sous la forme (4.6), on doit avoir

$$\begin{aligned}
\tilde{a}_{10} &= 0 & \tilde{b}_{10} &= 1 \\
\tilde{a}_{01} &= -1 & \tilde{b}_{01} &= 0 \\
\tilde{a}_{20} &= \frac{1}{2}(\tilde{v} - 5\tilde{n}) & \tilde{b}_{20} &= \tilde{a} \\
\tilde{a}_{11} &= 2\tilde{a} & \tilde{b}_{11} &= \frac{1}{2}(3\tilde{v} - 5\tilde{n}) \\
\tilde{a}_{02} &= \tilde{n} & \tilde{b}_{02} &= -\tilde{a}
\end{aligned}$$

où  $\tilde{a}$ ,  $\tilde{v}$ ,  $\tilde{n}$  sont les nouveaux paramètres pour  $\tilde{S}$ . Ceci nous conduit à un système comportant dix équations dépendant des onze inconnues  $\alpha$ ,  $a$ ,  $v$ ,  $n$ ,  $\tilde{a}$ ,  $\tilde{v}$ ,  $\tilde{n}$ ,  $a_{11}$ ,  $a_{12}$ ,  $a_{21}$ ,  $a_{22}$ . Les équations sont désignées par  $A_{ij}$  et  $B_{ij}$ . Le côté gauche représente les coefficients  $\tilde{a}_{ij}$ ,  $\tilde{b}_{ij}$ . Ce système d'équations est le suivant :

$$\begin{aligned}
A_{10} &: \frac{\alpha}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} (-a_{11}a_{12} - a_{21}a_{22}) = 0 \\
A_{01} &: \frac{\alpha}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} (-a_{12}^2 - a_{22}^2) = -1 \\
A_{20} &: \frac{\alpha}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} (-aa_{11}^2a_{12} + aa_{12}a_{21}^2 + 2aa_{11}a_{21}a_{22} + \frac{5}{2}na_{11}a_{12}a_{21} - \frac{5}{2}na_{11}^2a_{22} \\
&\quad + na_{21}^2a_{22} - \frac{3}{2}va_{11}a_{12}a_{21} + \frac{1}{2}va_{11}^2a_{22}) = \frac{1}{2}(\tilde{v} - 5\tilde{n}) \\
A_{11} &: \frac{\alpha}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} (-2aa_{11}a_{12}^2 + 4aa_{12}a_{21}a_{22} + 2aa_{11}a_{22}^2 + \frac{5}{2}na_{12}^2a_{21} - \frac{5}{2}na_{11}a_{12}a_{22} \\
&\quad + 2na_{21}a_{22}^2 - \frac{3}{2}va_{12}^2a_{21} - \frac{1}{2}va_{11}a_{12}a_{22}) = 2\tilde{a} \\
A_{02} &: \frac{\alpha}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} (-aa_{12}^3 + 3aa_{12}a_{22}^2 + na_{22}^3 - va_{12}^2a_{22}) = \tilde{n}
\end{aligned}$$

$$B_{10} : \frac{\alpha}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} (a_{11}^2 + a_{21}^2) = 1$$

$$B_{01} : \frac{\alpha}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} (a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22}) = 0$$

$$B_{20} : \frac{\alpha}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} (aa_{11}^3 - 3aa_{11}a_{21}^2 - na_{21}^3 + va_{11}^2a_{21}) = \tilde{a}$$

$$B_{11} : \frac{\alpha}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} (2aa_{11}^2a_{12} - 2aa_{12}a_{21}^2 - 4aa_{11}a_{21}a_{22} + \frac{5}{2}na_{11}a_{12}a_{21} - \frac{5}{2}na_{11}^2a_{22} - 2na_{21}^2a_{22} + \frac{1}{2}va_{11}a_{12}a_{21} + \frac{3}{2}va_{11}^2a_{22}) = \frac{1}{2}(3\tilde{v} - 5\tilde{n})$$

$$B_{02} : \frac{\alpha}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} (aa_{11}a_{12}^2 - 2aa_{12}a_{21}a_{22} - aa_{11}a_{22}^2 + \frac{5}{2}na_{12}^2a_{21} - \frac{5}{2}na_{11}a_{12}a_{22} - na_{21}a_{22}^2 - \frac{1}{2}va_{12}^2a_{21} + \frac{3}{2}va_{11}a_{12}a_{22}) = -\tilde{a}.$$

D'abord, on remarque que les équations  $A_{10}$  et  $B_{01}$  sont équivalentes, ce qui nous permet d'éliminer  $B_{01}$ . Séparons ensuite l'analyse selon deux possibilités :

$$a_{22} = 0 \text{ ou } a_{22} \neq 0.$$

**Premier cas :  $a_{22} = 0$**

D'abord, supposons  $a_{22} = 0$ . Alors, par les équations  $A_{10}$  et  $A_{01}$ , on a directement

$$a_{11} = 0 \text{ et } a_{21} = -\alpha a_{12}, \text{ avec } a_{12}a_{21} \neq 0.$$

En remplaçant  $a_{11}$  par 0 et  $a_{21}$  par  $-\alpha a_{12}$  dans l'équation  $B_{10}$ , on obtient

$$\alpha^2 = 1.$$

On a donc 2 cas à considérer :  $\alpha = 1$  ou  $\alpha = -1$ .

(i) Supposons  $\alpha = 1$ . En remplaçant  $\alpha$  par cette valeur,  $a_{11}$  par 0 et  $a_{21}$  par  $-a_{12}$ , on obtient le système d'équations suivant :

$$A_{20} : aa_{12} = \frac{1}{2}(\tilde{v} - 5\tilde{n})$$

$$A_{11} : \frac{a_{12}}{2}(3v - 5n) = 2\tilde{a}$$

$$A_{02} : -aa_{12} = \tilde{n}$$

$$B_{10} : 0 = 0$$

$$B_{20} : a_{12}n = \tilde{a}$$

$$B_{11} : -2aa_{12} = \frac{1}{2}(3\tilde{v} - 5\tilde{n})$$

$$B_{02} : \frac{a_{12}}{2}(v - 5n) = -\tilde{a}.$$



Clairement, on peut éliminer l'équation  $B_{10}$ . Aussi, les équations  $A_{02}$  et  $B_{20}$  donnent respectivement les expressions pour  $\tilde{n}$  et  $\tilde{a}$ . En substituant dans les équations restantes, on obtient la solution définie par la matrice

de transformation  $T = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} \\ -a_{12} & 0 \end{pmatrix}$  avec

$$\begin{aligned} a &\in \mathbb{R}, & \tilde{a} &= a_{12}n, \\ v &= 3n, & \tilde{v} &= 3\tilde{n}, \\ n &\in \mathbb{R}, & \tilde{n} &= -a_{12}a, \end{aligned}$$

ce qui correspond aux systèmes

$$S = \begin{cases} \dot{x} &= -y - nx^2 + 2axy + ny^2 \\ \dot{y} &= x + ax^2 + 2nxy - ay^2 \end{cases}$$

et

$$\tilde{S} = \begin{cases} \dot{\tilde{x}} &= -\tilde{y} - a_{12}a\tilde{x}^2 + 2a_{12}n\tilde{x}\tilde{y} - a_{12}a\tilde{y}^2 \\ \dot{\tilde{y}} &= \tilde{x} + a_{12}n\tilde{x}^2 - 2a_{12}a\tilde{x}\tilde{y} - a_{12}n\tilde{y}^2. \end{cases}$$

Cette solution correspond à une sous-famille particulière du cas (iii) du théorème, avec  $a_{11} = 0$ .

- (ii) Supposons  $\alpha = -1$ . En remplaçant  $\alpha$  par cette valeur,  $a_{11}$  par 0 et  $a_{21}$  par  $a_{12}$ , on obtient le système d'équations suivant :

$$\begin{aligned} A_{20} &: aa_{12} = \frac{1}{2}(\tilde{v} - 5\tilde{n}) \\ A_{11} &: -\frac{a_{12}}{2}(3v - 5n) = 2\tilde{a} \\ A_{02} &: -aa_{12} = \tilde{n} \\ B_{10} &: 0 = 0 \\ B_{20} &: -a_{12}n = \tilde{a} \\ B_{11} &: -2aa_{12} = \frac{1}{2}(3\tilde{v} - 5\tilde{n}) \\ B_{02} &: -\frac{a_{12}}{2}(v - 5n) = -\tilde{a}. \end{aligned}$$

On peut encore éliminer l'équation  $B_{10}$ . Aussi, les équations  $A_{02}$  et  $B_{20}$  donnent respectivement les expressions pour  $\tilde{n}$  et  $\tilde{a}$ . En substituant dans les équations restantes, on obtient la solution définie par la matrice de

transformation  $T = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} \\ a_{12} & 0 \end{pmatrix}$  avec

$$\begin{aligned} a &\in \mathbb{R}, & \tilde{a} &= -a_{12}n, \\ v &= 3n, & \tilde{v} &= 3\tilde{n}, \\ n &\in \mathbb{R}, & \tilde{n} &= -a_{12}a. \end{aligned}$$

Cette solution correspond à une sous-famille particulière du cas (iv) du théorème, avec  $a_{11} = 0$ .

**Deuxième cas :**  $a_{22} \neq 0$

Supposons maintenant que  $a_{22} \neq 0$ . Par  $A_{10}$ , on a

$$a_{21} = \frac{-a_{11}a_{12}}{a_{22}}. \quad (4.10)$$

En remplaçant  $a_{12}$  par  $\frac{-a_{11}a_{12}}{a_{22}}$  dans l'équation  $B_{10}$ , on obtient

$$a_{22} = \alpha a_{11}.$$

Si on revient à l'équation (4.10), on a alors directement

$$a_{12} = -\alpha a_{21}.$$

En substituant dans l'équation  $A_{01}$ , on conclut  $\alpha^2 = 1$ , ce qui nous laisse encore une fois deux cas possibles :  $\alpha = 1$  ou  $\alpha = -1$ .

(i) Supposons  $\alpha = 1$ . Alors,  $a_{22} = a_{11}$  et  $a_{21} = a_{12}$ . En substituant, on en arrive au système d'équations

$$A_{20} : \frac{-6aa_{11}^2a_{12} + 2aa_{12}^3 - 5na_{11}^3 + va_{11}^3 - 3na_{11}a_{12}^2 + 3va_{11}a_{12}^2}{2(a_{11}^2 + a_{12}^2)} = \frac{1}{2}(\tilde{v} - 5\tilde{n})$$

$$A_{11} : \frac{4aa_{11}^3 - 12aa_{11}a_{12}^2 - 5na_{12}^3 + 3va_{12}^3 - 9na_{11}^2a_{12} - va_{11}^2a_{12}}{2(a_{11}^2 + a_{12}^2)} = 2\tilde{a}$$

$$A_{02} : \frac{3aa_{11}^2a_{12} - aa_{12}^3 + na_{11}^3 - va_{11}a_{12}^2}{a_{11}^2 + a_{12}^2} = \tilde{n}$$

$$B_{20} : \frac{aa_{11}^3 - 3aa_{11}a_{12}^2 + na_{12}^3 - va_{11}^2a_{12}}{a_{11}^2 + a_{12}^2} = \tilde{a}$$

$$B_{11} : \frac{12aa_{11}^2a_{12} - 4aa_{12}^3 - 5na_{11}^3 + 3va_{11}^3 - 9na_{11}a_{12}^2 - va_{11}a_{12}^2}{2(a_{11}^2 + a_{12}^2)} = \frac{1}{2}(3\tilde{v} - 5\tilde{n})$$

$$B_{02} : \frac{-2aa_{11}^3 + 6aa_{11}a_{12}^2 - 5na_{12}^3 + va_{12}^3 - 3na_{11}^2a_{12} + 3va_{11}^2a_{12}}{2(a_{11}^2 + a_{12}^2)} = -\tilde{a}.$$

En multipliant  $B_{02}$  par  $-1$ , on a

$$\tilde{a} = \frac{aa_{11}^3 - 3aa_{11}a_{12}^2 + na_{12}^3 - va_{11}^2a_{12}}{a_{11}^2 + a_{12}^2} \quad (B_{20})$$

et

$$\tilde{a} = \frac{2aa_{11}^3 - 6aa_{11}a_{12}^2 + 5na_{12}^3 - va_{12}^3 + 3na_{11}^2a_{12} - 3va_{11}^2a_{12}}{2(a_{11}^2 + a_{12}^2)}. \quad (-B_{02})$$

On a donc l'égalité des deux membres de droite, c'est-à-dire que

$$\begin{aligned} & \frac{aa_{11}^3 - 3aa_{11}a_{12}^2 + na_{12}^3 - va_{11}^2a_{12}}{a_{11}^2 + a_{12}^2} \\ &= \frac{2aa_{11}^3 - 6aa_{11}a_{12}^2 + 5na_{12}^3 - va_{12}^3 + 3na_{11}^2a_{12} - 3va_{11}^2a_{12}}{2(a_{11}^2 + a_{12}^2)}. \end{aligned}$$

Après simplification, on obtient

$$a_{12}(v - 3n) = 0. \quad (4.11)$$

Il y a donc deux possibilités :  $a_{12} = 0$  ou  $v = 3n$ .

*Premier sous-cas :  $a_{12} = 0$*

Supposons que  $a_{12} = 0$ . Alors, on a nécessairement  $a_{21} = 0$  et  $a_{11} = a_{22}$ . En substituant ceci dans notre système d'équations, on a

$$\begin{aligned} A_{20} &: a_{11}(v - 5n) = \tilde{v} - 5\tilde{n} \\ A_{11} &: a_{11}a = \tilde{a} \\ A_{02} &: a_{11}n = \tilde{n} \\ B_{20} &: a_{11}a = \tilde{a} \\ B_{11} &: a_{11}(3v - 5n) = 3\tilde{v} - 5\tilde{n} \\ B_{02} &: a_{11}a = \tilde{a}. \end{aligned}$$

Ceci mène à la transformation  $T = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{11} \end{pmatrix}$  avec

$$\begin{aligned} a &\in \mathbb{R}, & \tilde{a} &= a_{11}a, \\ v &\in \mathbb{R}, & \tilde{v} &= a_{11}v, \\ n &\in \mathbb{R}, & \tilde{n} &= a_{11}n, \end{aligned}$$

ce qui correspond aux systèmes

$$S = \begin{cases} \dot{x} &= -y + \frac{(v-5n)}{2}x^2 + 2axy + ny^2 \\ \dot{y} &= x + ax^2 + \frac{(3v-5n)}{2}xy - ay^2 \end{cases}$$

et

$$\tilde{S} = \begin{cases} \dot{\tilde{x}} &= -\tilde{y} + a_{11}\frac{(v-5n)}{2}\tilde{x}^2 + 2a_{11}a\tilde{x}\tilde{y} + a_{11}n\tilde{y}^2 \\ \dot{\tilde{y}} &= \tilde{x} + a_{11}a\tilde{x}^2 + a_{11}\frac{(3v-5n)}{2}\tilde{x}\tilde{y} - a_{11}a\tilde{y}^2. \end{cases}$$

Ceci démontre le cas (i) du théorème.

Deuxième sous-cas :  $v = 3n$

Le dernier cas correspond à  $v = 3n$ . Le système d'équations à résoudre devient alors

$$\begin{aligned}
 A_{20} &: \frac{-3aa_{11}^2a_{12} + aa_{12}^3 - na_{11}^3 + 3na_{11}a_{12}^2}{a_{11}^2 + a_{12}^2} = \frac{1}{2}(\tilde{v} - 5\tilde{n}) \\
 A_{11} &: \frac{2aa_{11}^3 - 6aa_{11}a_{12}^2 - 6na_{11}^2a_{12} + 2na_{12}^3}{a_{11}^2 + a_{12}^2} = 2\tilde{a} \\
 A_{02} &: \frac{3aa_{11}^2a_{12} - aa_{12}^3 + na_{11}^3 - 3na_{11}a_{12}^2}{a_{11}^2 + a_{12}^2} = \tilde{n} \\
 B_{20} &: \frac{aa_{11}^3 - 3aa_{11}a_{12}^2 + na_{12}^3 - 3na_{11}^2a_{12}}{a_{11}^2 + a_{12}^2} = \tilde{a} \\
 B_{11} &: \frac{6aa_{11}^2a_{12} - 2aa_{12}^3 + 2na_{11}^3 - 6na_{11}a_{12}^2}{a_{11}^2 + a_{12}^2} = \frac{1}{2}(3\tilde{v} - 5\tilde{n}) \\
 B_{02} &: \frac{-aa_{11}^3 + 3aa_{11}a_{12}^2 - na_{12}^3 + 3na_{11}^2a_{12}}{a_{11}^2 + a_{12}^2} = -\tilde{a}.
 \end{aligned}$$

Ceci est un système à 7 inconnues  $(a_{11}, a_{12}, a, n, \tilde{a}, \tilde{v}, \tilde{n}) \in \mathbb{R}^7$ . On constate que  $A_{11} \Leftrightarrow B_{20} \Leftrightarrow B_{02}$ , on peut donc éliminer les équations  $A_{11}$  et  $B_{02}$ , ce qui mène à

$$\begin{aligned}
 A_{20} &: \frac{-3aa_{11}^2a_{12} + aa_{12}^3 - na_{11}^3 + 3na_{11}a_{12}^2}{a_{11}^2 + a_{12}^2} = \frac{1}{2}(\tilde{v} - 5\tilde{n}) \\
 A_{02} &: \frac{3aa_{11}^2a_{12} - aa_{12}^3 + na_{11}^3 - 3na_{11}a_{12}^2}{a_{11}^2 + a_{12}^2} = \tilde{n} \\
 B_{20} &: \frac{aa_{11}^3 - 3aa_{11}a_{12}^2 + na_{12}^3 - 3na_{11}^2a_{12}}{a_{11}^2 + a_{12}^2} = \tilde{a} \\
 B_{11} &: \frac{6aa_{11}^2a_{12} - 2aa_{12}^3 + 2na_{11}^3 - 6na_{11}a_{12}^2}{a_{11}^2 + a_{12}^2} = \frac{1}{2}(3\tilde{v} - 5\tilde{n}).
 \end{aligned}$$

On obtient donc directement les expressions pour  $\tilde{a}$  et  $\tilde{n}$ . Pour connaître la valeur de  $\tilde{v}$ , on peut prendre l'équation  $A_{20}$  ou  $B_{11}$  et on substitue la valeur de  $\tilde{n}$  par celle donnée dans l'équation  $A_{02}$ , et on trouve

$$\tilde{v} = \frac{3(3aa_{11}^2a_{12} - aa_{12}^3 + na_{11}^3 - 3na_{11}a_{12}^2)}{a_{11}^2 + a_{12}^2} = 3\tilde{n}.$$

On a donc la transformation  $T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ -a_{12} & a_{11} \end{pmatrix}$  avec  $a_{11}^2 + a_{12}^2 \neq 0$  et

$$\begin{aligned} a \in \mathbb{R}, \quad \tilde{a} &= \frac{aa_{11}^3 - 3aa_{11}a_{12}^2 + na_{12}^3 - 3na_{11}^2a_{12}}{a_{11}^2 + a_{12}^2} \\ v = 3n, \quad \tilde{v} &= 3\tilde{n} \\ n \in \mathbb{R}, \quad \tilde{n} &= \frac{3aa_{11}^2a_{12} - aa_{12}^3 + na_{11}^3 - 3na_{11}a_{12}^2}{a_{11}^2 + a_{12}^2}. \end{aligned}$$

Ces paramètres correspondent aux systèmes

$$S = \begin{cases} \dot{x} &= -y - nx^2 + 2axy + ny^2 \\ \dot{y} &= x + ax^2 + 2nxy - ay^2 \end{cases}$$

et

$$\tilde{S} = \begin{cases} \dot{\tilde{x}} &= -\tilde{y} - \frac{3aa_{11}^2a_{12} - aa_{12}^3 + na_{11}^3 - 3na_{11}a_{12}^2}{a_{11}^2 + a_{12}^2}\tilde{x}^2 + 2\frac{aa_{11}^3 - 3aa_{11}a_{12}^2 + na_{12}^3 - 3na_{11}^2a_{12}}{a_{11}^2 + a_{12}^2}\tilde{x}\tilde{y} \\ &+ \frac{3aa_{11}^2a_{12} - aa_{12}^3 + na_{11}^3 - 3na_{11}a_{12}^2}{a_{11}^2 + a_{12}^2}\tilde{y}^2 \\ \dot{\tilde{y}} &= \tilde{x} + \frac{aa_{11}^3 - 3aa_{11}a_{12}^2 + na_{12}^3 - 3na_{11}^2a_{12}}{a_{11}^2 + a_{12}^2}\tilde{x}^2 + 2\frac{3aa_{11}^2a_{12} - aa_{12}^3 + na_{11}^3 - 3na_{11}a_{12}^2}{a_{11}^2 + a_{12}^2}\tilde{x}\tilde{y} \\ &- \frac{aa_{11}^3 - 3aa_{11}a_{12}^2 + na_{12}^3 - 3na_{11}^2a_{12}}{a_{11}^2 + a_{12}^2}\tilde{y}^2. \end{cases}$$

Ceci démontre le cas (iii) du théorème.

- (ii) Supposons  $\alpha = -1$ . Alors,  $a_{22} = -a_{11}$  et  $a_{21} = a_{12}$ . En suivant les mêmes étapes que le cas précédent, on en arrive encore à l'équation  $a_{12}(v - 3n) = 0$ . On traite alors les sous-cas, et on obtient ceci :

Si  $a_{12} = 0$ , alors on a  $T = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{11} \end{pmatrix}$  avec  $a_{11} \neq 0$

$$\begin{aligned} a \in \mathbb{R}, \quad \tilde{a} &= a_{11}a \\ v \in \mathbb{R}, \quad \tilde{v} &= -a_{11}v \\ n \in \mathbb{R}, \quad \tilde{n} &= -a_{11}n. \end{aligned}$$

Si  $v = 3n$ , alors on a  $T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & -a_{11} \end{pmatrix}$  avec  $a_{11}^2 + a_{12}^2 \neq 0$  et

$$\begin{aligned} a \in \mathbb{R}, \quad \tilde{a} &= \frac{aa_{11}^3 - 3aa_{11}a_{12}^2 + na_{12}^3 - 3na_{11}^2a_{12}}{a_{11}^2 + a_{12}^2} \\ v = 3n, \quad \tilde{v} &= 3\tilde{n} \\ n \in \mathbb{R}, \quad \tilde{n} &= \frac{3aa_{11}^2a_{12} - aa_{12}^3 + na_{11}^3 - 3na_{11}a_{12}^2}{a_{11}^2 + a_{12}^2}. \end{aligned}$$

□

**Corollaire 4.1.** *Considérons l'espace des paramètre  $P_2(\mathbb{R})$ . Alors, il existe exactement deux familles de transformations non triviales  $(\bar{g}, S) = ((T, \alpha), S) \in \bar{G}$  tel que  $S$  et  $\tilde{S}$  soit de la forme (4.6) :*

(i) *La transformation  $\bar{g}$  définie par  $\alpha = -1$  et  $T = a_{11} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$  où  $a_{11} \neq 0$  envoie un système*

$$S = \begin{cases} \dot{x} &= -y + \frac{(v-5n)}{2}x^2 + 2axy + ny^2 \\ \dot{y} &= x + ax^2 + \frac{(3v-5n)}{2}xy - ay^2 \end{cases} \quad \text{avec } (a, v, n) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}.$$

*sur un système*

$$\tilde{S} = \begin{cases} \dot{\tilde{x}} &= -\tilde{y} + a_{11} \frac{(v-5n)}{2} \tilde{x}^2 - 2a_{11} a \tilde{x} \tilde{y} + a_{11} n \tilde{y}^2 \\ \dot{\tilde{y}} &= \tilde{x} - a_{11} a \tilde{x}^2 + a_{11} \frac{(3v-5n)}{2} \tilde{x} \tilde{y} + a_{11} a \tilde{y}^2. \end{cases}$$

*Cette famille est la symétrie  $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{t}) = (-x, y, -t)$  dans  $P_2(\mathbb{R})$ .*

(ii) *La transformation définie par  $\alpha = 1$  et  $T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ -a_{12} & a_{11} \end{pmatrix}$  où  $a_{11}a_{12} \neq 0$  envoie un système*

$$S = \begin{cases} \dot{x} &= -y - nx^2 + 2axy + ny^2 \\ \dot{y} &= x + ax^2 + 2nxy - ay^2 \end{cases} \quad \text{avec } (a, v, n) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}.$$

*sur un système*

$$\tilde{S} = \begin{cases} \dot{\tilde{x}} &= -\tilde{y} - \frac{3aa_{11}^2a_{12}-aa_{12}^3+na_{11}^3-3na_{11}a_{12}^2}{a_{11}^2+a_{12}^2} \tilde{x}^2 + 2 \frac{aa_{11}^3-3aa_{11}a_{12}^2+na_{12}^3-3na_{11}^2a_{12}}{a_{11}^2+a_{12}^2} \tilde{x} \tilde{y} \\ &+ \frac{3aa_{11}^2a_{12}-aa_{12}^3+na_{11}^3-3na_{11}a_{12}^2}{a_{11}^2+a_{12}^2} \tilde{y}^2 \\ \dot{\tilde{y}} &= \tilde{x} + \frac{aa_{11}^3-3aa_{11}a_{12}^2+na_{12}^3-3na_{11}^2a_{12}}{a_{11}^2+a_{12}^2} \tilde{x}^2 + 2 \frac{3aa_{11}^2a_{12}-aa_{12}^3+na_{11}^3-3na_{11}a_{12}^2}{a_{11}^2+a_{12}^2} \tilde{x} \tilde{y} \\ &- \frac{aa_{11}^3-3aa_{11}a_{12}^2+na_{12}^3-3na_{11}^2a_{12}}{a_{11}^2+a_{12}^2} \tilde{y}^2. \end{cases}$$

**DÉMONSTRATION.** Considérons la famille (i) du théorème 4.1. Cette famille envoie un paramètre  $\lambda = [a : v : n] \in P_2(\mathbb{R})$  sur un paramètre  $\tilde{\lambda} = [\tilde{a} : \tilde{v} : \tilde{n}] = [a_{11}a : a_{11}v : a_{11}n] = [a : v : n] \in P_2(\mathbb{R})$ . Cette transformation est triviale puisque qu'elle est l'identité dans  $P_2(\mathbb{R})$  et dans **hD**.

La famille (ii) du théorème 4.1 envoie un paramètre  $\lambda = [a : v : n] \in P_2(\mathbb{R})$  sur un paramètre  $\tilde{\lambda} = [\tilde{a} : \tilde{v} : \tilde{n}] = [-a_{11}a : a_{11}v : a_{11}n] = [-a : v : n] \in P_2(\mathbb{R})$ . Cette famille est la symétrie  $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{t}) = (-x, y, -t)$ .

Considérons la famille (iii) du théorème 4.1. Cette famille envoie un paramètre  $\lambda = [a : v : n] = [a : 3n : n] \in P_2(\mathbb{R})$  sur un paramètre  $\tilde{\lambda} = [\tilde{a} : \tilde{v} : \tilde{n}] = \left[ \frac{aa_{11}^3-3aa_{11}a_{12}^2+na_{12}^3-3na_{11}^2a_{12}}{a_{11}^2+a_{12}^2} : 3\tilde{n} : \frac{3aa_{11}^2a_{12}-aa_{12}^3+na_{11}^3-3na_{11}a_{12}^2}{a_{11}^2+a_{12}^2} \right] \in P_2(\mathbb{R})$ . Ceci est une nouvelle transformation qui doit être étudiée plus en détail.

Soit la famille (iv) du théorème 4.1. Celle-ci s'applique aux paramètres  $\lambda = [a : v : n] = [a : 3n : n] \in P_2(\mathbb{R})$  et les transforme sur les paramètres  $\tilde{\lambda} = [\tilde{a} : \tilde{v} : \tilde{n}] = \left[ -\frac{aa_{11}^3 - 3aa_{11}a_{12}^2 + na_{12}^3 - 3na_{11}^2a_{12}}{a_{11}^2 + a_{12}^2} : 3\tilde{n} : \frac{3aa_{11}^2a_{12} - aa_{12}^3 + na_{11}^3 - 3na_{11}a_{12}^2}{a_{11}^2 + a_{12}^2} \right] \in P_2(\mathbb{R})$ . Cette transformation est la composition de la transformation de la famille (ii) et de la famille (iii).  $\square$

La famille de transformations (i) trouvée dans le corollaire 4.1 représente une symétrie déjà connue. L'unique nouvelle famille de transformations est la famille (ii) du corollaire précédent.

**Corollaire 4.2.** *Considérons le corollaire 4.1. La famille de transformations (ii) du groupe  $\tilde{G}$  n'agit que sur les systèmes à centre d'équation  $v - 3n = 0$  dans  $P_2(\mathbb{R})$ .*

DÉMONSTRATION. La famille (ii) du corollaire 4.1 est  $(\bar{g}, S) = ((T, \alpha), S)$  tel que

$$\alpha = 1, \quad T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ -a_{12} & a_{11} \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad a_{11}^2 + a_{12}^2 > 0$$

et

$$S = \begin{cases} \dot{x} &= -y - nx^2 + 2axy + ny^2 \\ \dot{y} &= x + ax^2 + 2nxy - ay^2. \end{cases}$$

Ces systèmes initiaux ont des paramètres qui correspondent aux points

$$\lambda = [a : v : n] = [a : 3n : n]$$

dans  $P_2(\mathbb{R})$ . Clairement, ces systèmes satisfont l'équation (4.7) et sont donc des systèmes à centre.

La matrice  $T$  envoie ces systèmes sur les systèmes transformés  $\tilde{S}$  suivants

$$\tilde{S} = \begin{cases} \dot{\tilde{x}} &= -\tilde{y} - \frac{3aa_{11}^2a_{12} - aa_{12}^3 + na_{11}^3 - 3na_{11}a_{12}^2}{a_{11}^2 + a_{12}^2} \tilde{x}^2 + 2\frac{aa_{11}^3 - 3aa_{11}a_{12}^2 + na_{12}^3 - 3na_{11}^2a_{12}}{a_{11}^2 + a_{12}^2} \tilde{x}\tilde{y} \\ &\quad + \frac{3aa_{11}^2a_{12} - aa_{12}^3 + na_{11}^3 - 3na_{11}a_{12}^2}{a_{11}^2 + a_{12}^2} \tilde{y}^2 \\ \dot{\tilde{y}} &= \tilde{x} + \frac{aa_{11}^3 - 3aa_{11}a_{12}^2 + na_{12}^3 - 3na_{11}^2a_{12}}{a_{11}^2 + a_{12}^2} \tilde{x}^2 + 2\frac{3aa_{11}^2a_{12} - aa_{12}^3 + na_{11}^3 - 3na_{11}a_{12}^2}{a_{11}^2 + a_{12}^2} \tilde{x}\tilde{y} \\ &\quad - \frac{aa_{11}^3 - 3aa_{11}a_{12}^2 + na_{12}^3 - 3na_{11}^2a_{12}}{a_{11}^2 + a_{12}^2} \tilde{y}^2 \end{cases}$$

dont les paramètres correspondent au point

$$\begin{aligned} \tilde{\lambda} &= [\tilde{a} : \tilde{v} : \tilde{n}] \\ &= \left[ \frac{aa_{11}^3 - 3aa_{11}a_{12}^2 + na_{12}^3 - 3na_{11}^2a_{12}}{a_{11}^2 + a_{12}^2} : \frac{3(3aa_{11}^2a_{12} - aa_{12}^3 + na_{11}^3 - 3na_{11}a_{12}^2)}{a_{11}^2 + a_{12}^2} : \frac{3aa_{11}^2a_{12} - aa_{12}^3 + na_{11}^3 - 3na_{11}a_{12}^2}{a_{11}^2 + a_{12}^2} \right] \\ &= [\tilde{a} : 3\tilde{n} : \tilde{n}] \end{aligned}$$

dans  $P_2(\mathbb{R})$ . Ces systèmes satisfont aussi l'équation (4.7), c'est-à-dire  $a(v - 3n)(2a^2 + vn - n^2) = 0$ . Ils sont donc des systèmes à centre situés sur la même ligne  $v - 3n = 0$ .  $\square$

**Théorème 4.2.** (i) L'action de  $\mathbf{G}$  sur  $\mathbf{hD} \cap \mathbf{QW3}$  n'est pas triviale.

(ii) L'espace quotient de  $\mathbf{QW3}$  avec la topologie induite par l'action du groupe  $\mathbf{G}$  coïncide avec  $\mathbf{hD} \setminus \{a(v - 3n)(2a^2 + vn - n^2) = 0\}$ . Cet espace est formé de deux composantes connexes, chacune homéomorphe à un disque. Les systèmes possédant des cycles limites se trouvent uniquement dans la composante connexe délimitée par  $a = 0$  et par  $2a^2 + vn - n^2 = 0$  dans  $\mathbf{hD}$ .

DÉMONSTRATION. Considérons le demi-disque  $\mathbf{hD}$  de la forme normale de Bautin et retirons du demi-disque les systèmes qui sont à centre. Cela nous donne la figure 4.2. Les courbes enlevées sont celles où se trouvent les systèmes à centre, c'est-à-dire  $a = 0$ , où se trouvent des systèmes symétriques,  $v - 3n = 0$ , où se trouvent des systèmes qui ont trois droites invariantes, et  $2a^2 + vn - n^2 = 0$  qui ont une cubique et une parabole invariantes [25].

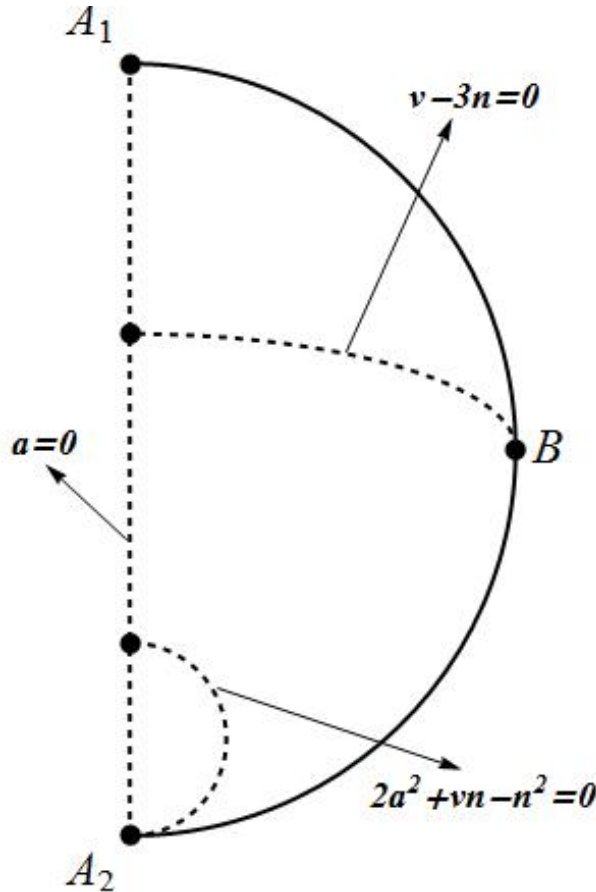


FIGURE 4.2. Les systèmes à centre dans  $\mathbf{hD}$



### Démonstration du point (i)

On identifie les segments  $A_1B$  et  $A_2B$  par l'action du groupe  $G$ . Considérons les systèmes de **QW3** dont les paramètres sont sur  $A_2B$ , i.e.  $a > 0, v < 0$  et  $n = 0$ . Étant donné qu'on est dans  $P_2(\mathbb{R})$ , on a

$$(a, v, 0) \sim (-a, -v, 0),$$

où  $-a < 0$  et  $-v > 0$ . On peut ensuite agir avec la transformation (i) du corollaire 4.1 en posant  $a_{11} = 1$ . Ceci est la symétrie  $(x, y, t) \rightarrow (-x, y, -t)$  et donne

$$(-a, -v, 0) \rightarrow (a, -v, 0),$$

où  $a > 0$  et  $-v > 0$ .

Tout point  $(a, v, 0)$  sur le segment  $A_2B$  est donc équivalent au point  $(a, -v, 0)$  sur le segment  $A_1B$  par l'action du groupe  $G$ .

### Démonstration du point (ii)

Cette identification nous permet de courber le demi-disque **hD** pour obtenir une figure homéomorphe à la figure 4.3 :

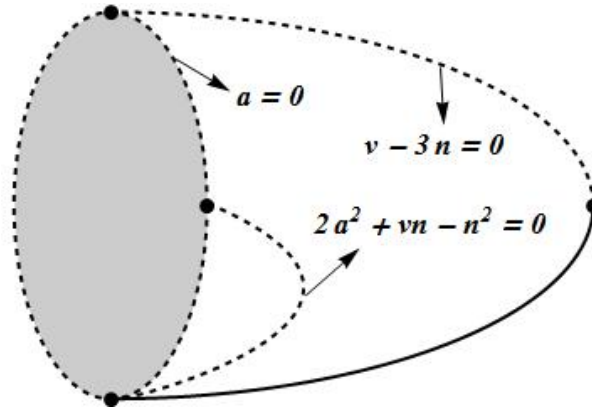


FIGURE 4.3. Les systèmes à centre dans **hD**

On coupe alors le long de la ligne  $v - 3n = 0$ , et en ouvrant cette figure, on obtient finalement une figure homéomorphe à la figure 4.4 :

Il est clair que les deux composantes connexes sont homéomorphes à des disques ouverts, ce qui démontre le théorème (4.2). En regardant le diagramme de bifurcation (Figure 4.1), tous les phénomènes intéressants impliquant des cycles limites se situent à l'intérieur de la région délimitée par les courbes  $a = 0$  et  $2a^2 + vn - n^2 = 0$ . Il n'y a aucun cycle limite dans l'autre composante connexe.  $\square$

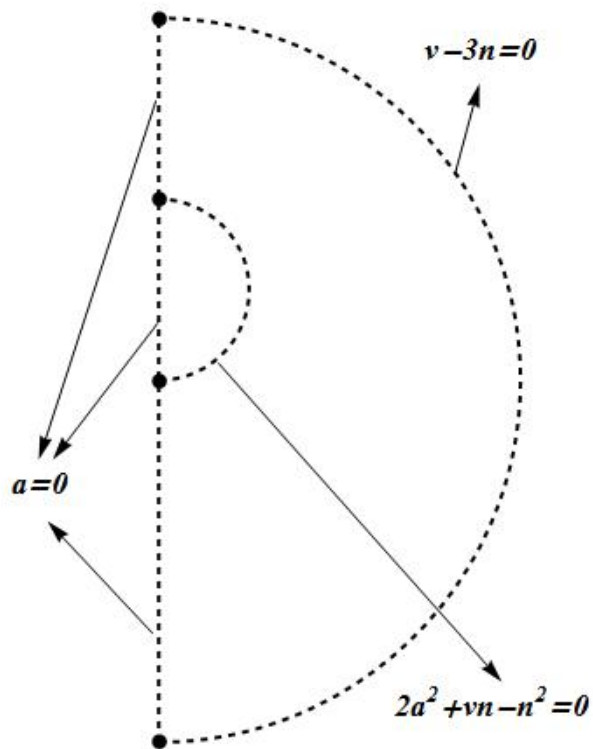


FIGURE 4.4. Les systèmes à centre dans  $\mathbf{hD}$

**Remarque 4.1.** Le théorème précédent est un théorème de classification des systèmes dans  $\mathbf{QW3}$  par rapport à l'action du groupe  $\mathbf{G}$ . En effet,  $\mathbf{hD} \cap \mathbf{QW3}$  forme un système de représentants de  $\mathbf{QW3}$  par rapport à l'action de  $\mathbf{G}$ .

## CONCLUSION

---

Les formes normales sont des outils importants pour étudier les systèmes différentiels dans le plan et pour déterminer leurs portraits de phases. Pour une même classe d'équations différentielles, on peut trouver plusieurs formes normales. Il peut être avantageux d'utiliser l'une ou l'autre des formes normales existantes pour une classe d'équations différentielles, dépendamment du problème étudié. En effet, un calcul peut être facile à effectuer en utilisant l'une des formes normales, et très complexe en utilisant une autre. Pour un problème spécifique, il est donc important de savoir choisir la forme normale qui convient.

Dans ce travail, il a été question de deux formes normales pour les systèmes quadratiques  $\mathbf{QW3}$ , celle de Li et celle de Bautin, par rapport à l'action du groupe  $\mathbf{G}$  des transformations affines et des homothéties du temps. La forme normale de Li a été très utile pour réaliser le diagramme de bifurcation car le côté droit de l'équation  $\dot{y} = q(x, y)$  de (2.15) se factorise, ce qui simplifie le calcul des points singuliers finis. Les premiers travaux sur le diagramme de bifurcation de systèmes dans  $\mathbf{QW3}$  ont été réalisés en utilisant cette forme. Toutefois, pour déterminer l'espace quotient  $\mathbf{QW3}/\mathbf{G}$ , cette forme s'est avérée beaucoup plus difficile à manipuler. Il était donc naturel de tenter le calcul avec une autre forme normale, celle de Bautin. À travers le théorème original 4.2, il a été montré que cette forme normale menait directement à l'espace quotient. Il a été montré que cet espace quotient a deux composantes connexes, chacune homéomorphe à un disque, les cycles limites se trouvant dans une seule de ces deux composantes connexes.

Ce travail ouvre la voie à la construction de l'espace quotient  $\mathbf{QW2}/\mathbf{G}$ , où  $\mathbf{QW2}$  est l'ensemble des systèmes quadratiques à foyer faible d'ordre deux.



## BIBLIOGRAPHIE

---

- [1] ANDRONOV, A.A., ET AL. *Theory of Bifurcation of Dynamic Systems in a plane*, Nauka, Moscow, 1966, (in Russian).
- [2] ANDRONOVA, E.A., *Decomposition of the parameter space of a quadratic equation with a singular point of center type and topological structure with limit cycles*, Ph.D. Thesis, The Gorky Institute of Water Transport Engineers, Gorky, Russia, 1988, (in Russian).
- [3] ARTÈS J.C., LLIBRE J., *Quadratic Hamiltonian Vector Fields*, J. Differential Equations **107**, (1994), 80-95.
- [4] ARTÈS, J.C., LLIBRE, J., *Quadratic Vector Fields with a Weak Focus of Third Order*, Publicacions Matemàtiques **41**, (1997), 7-39.
- [5] ARTÈS, J.C, LLIBRE, J., DUMORTIER, F., *Qualitative Theory of Planar Differential Systems*, Springer, 2006.
- [6] ARTES, J.C, LLIBRE, J., SCHLOMIUK, D., *The Geometry of Quadratic Systems with a Weak Focus of Second Order*, Int. Journal of Bifurcation and Chaos **16**, No.11 (2006), 3127-3194.
- [7] LLIBRE, J., SCHLOMIUK, D. *The Geometry of Quadratic Differential Systems with a Weak Focus of Third Order*, Canadian Journal of Math. **56**, (2004), 310-343.
- [8] BAUTIN, N.N., *On the number of limit cycles which appear with the variation of the coefficients from an equilibrium position of focus or center type*, Translations of the Amer. Math. Soc. 1, 396-413. Translated from the Russian paper with the same title published by Math. USSR b., **100**, (1954), 397-413.
- [9] CHAVARRIGA, J., GIACOMINI, H., GINE, H., LLIBRE, J., *On the integrability of two-dimensional flows*, J., Differential Equations **157**, (1999), 163-182.
- [10] DARBOUX, G, *Mémoire sur les équations différentielles algébriques du premier ordre et du premier degré*, Bull. Sciences Math. Sér.2, **2**(1), (1878), 60-96, 123-144.
- [11] DULAC, H., *Sur les cycles limites*, J. Bull. Soc. Math. France **51**, (1923), 45-188.
- [12] DUMORTIER, F., LLIBRE, J., ARTÈS, J.C., *Qualitative Theory of Planar Differential Systems*, Springer 2006.

- [13] ECALLE, J., *Introduction aux fonctions analysables et preuve constructive de la conjecture de Dulac*, Hermann, (1992), 337 pp.
- [14] GONZALEZ VELASCO, E. A. *Generic properties of polynomial vector fields at infinity*, Trans. Amer. Math. Soc. **143**, (1969), 201-222.
- [15] HILBERT, D. *Mathematische Probleme*, (Lecture at the Second International Congress of Mathematicians, Paris 1900) Nachr. Ges. Wiss. Göttingen Math.-Phys. Kl., (1900), 253-297.
- [16] HILBERT, D. *Mathematical problems*, Bull. Amer. Math. Soc. **8**, (1902), 437-479.
- [17] IL'YASHENKO, Y. *Finiteness Theorems for Limit Cycles*, Translation of Mathematical Monographs **94**, (1991), 288 pp.
- [18] LI, C. *Two problems of planar quadratic systems*, Sci Sinica **26**, (1983), 471-481.
- [19] LI, C. *Non-existence of limit cycles around a weak focus of order three for any quadratic system.*, Chinese Ann. Math. Ser.B **7**, (1986), 174-190.
- [20] MARKUS, L. *Global Structure of Ordinary Differential Equations in the Plane*, Trans. Amer. Math. Soc. **76**, (1954), 127-148.
- [21] PAL, J., SCHLOMIUK, D. *Summing up the dynamics of quadratic hamiltonian systems with a center*, Canad. J. Math. **49**, (1997), 583-599.
- [22] PERKO, L. *Differential Equations and Dynamical Systems*, third edition, Springer 2001.
- [23] POINCARÉ, H. *Mémoire sur les courbes définies par les équations différentielles*, J. Math. Pures Appl. (3), **7**, (1881), 375-422.
- [24] POINCARÉ, H. *Mémoire sur les courbes définies par les équations différentielles*, J. Math. Pures Appl. (4), **1**, (1885), 167-244.
- [25] SCHLOMIUK, D. *Algebraic particular integrals, integrability and the problem of the center*, Trans. Amer. Math. Soc. **338**, (1993), 799-841.
- [26] SCHLOMIUK, D. *Algebraic and Geometric Aspects of the Theory of Polynomial Vector Fields*, Bifurcations and Periodic Orbits of Vector Fields, (D. Schlomiuk Editor), NATO ASI Series, Series C : Mathematical and Physical Sciences, Vol. 408, 1993, 429-467.
- [27] SCHLOMIUK, D. *Aspects of planar polynomial vector fields : Global versus local, real versus complex, analytic versus algebraic and geometric*, in Normal forms, Bifurcations and Finiteness Problems in Differential Equations, (Yu. Ilyashenko and C. Rousseau Editors), Kluwer Academic Publishers, NATO Science Series II : Mathematics, Physics and Chemistry, Vol. 137, 2004, 471-509.
- [28] SHI, S. *A concrete example of the existence of four limit cycles for planar quadratic systems*, Sci. Sinica, **23**, (1980), 153-158.
- [29] SHI, S. *A method of constructing cycles without contact around a weak focus*, J. Differential Equations, **41**, (1981), 301-312.

- [30] SHI S. *On the structure of Poincaré-Lyapunov constant for the weak focus of polynomial vector fields*, J. Differential Equations, **52**, (1984), 52-57.
- [31] SMALE, S. *Mathematical Problems for the Next Century*, The Mathematical Intelligencer, Spring **20**, Issue 2, (1998), 7-15.
- [32] VULPE, N.I. *Affine invariant conditions for the topological discrimination of quadratic systems with a center*, Differential Equations **19**, (1983), 273-280.
- [33] ZOLADEK, H. *Quadratic systems with center and their perturbations*, J. Differential Equations, **109**, (1994), 223-273.